2. Прямое формальное применение фундаментальных законов к объекту, рассматриваемому как целое, не всегда возможно (пп. 2, 3). В этих случаях требуется просуммировать элементарные акты взаимодействия между его частями, принимая во внимание свойства объекта (например, его геометрию).

3. Одними и теми же моделями могут описываться совершенно разные по своей природе объекты, подчиняющиеся разным фундаментальным законам, и, наоборот, данному закону могут отвечать принципиально разные модели (например, линейные и нелинейные; см. п. 3).

4. Необходимо использовать все возможности для проверки правильности построения модели (предельные переходы — пп. 2, 3, другие фундаментальные законы — п. 4 и т. д.).

УПРАЖНЕНИЯ

1. В задаче о всплытии подводной лодки учитывается сопротивление воды. Принимая силу сопротивления равной $F_1 = -k_0 u$, где $k_0 > 0$ — коэффициент, зависящий от свойств воды и формы подлодки, u — вертикальная скорость лодки, найдите максимальную глубину H, при всплытии с которой силой F_1 можно пренебречь в любой момент времени $t \leqslant t_k$ (должно выполняться требование $F_1 \ll \ll F - P$).

2. Повторяя рассуждения п. 2, найдите силу притяжения электрона к обкладкам конденсатора, имеющим конечные размеры R_1, R_3. Убедитесь в том, что при $R_1 \to \infty$, $R_3 \to \infty$ полученное выражение переходит в формулу (2).

3. В задаче п. 3 введите толщину кольца d, найдите силу F и убедитесь, что полученное выражение при $d \to 0$ совпадает с формулой (3).

4. Пусть расстояние между точкой нейтрального положения пружины $r = = 0$ и стенкой, к которой она крепится, равно L (см. рис. 11). Найдите, пользуясь формулой (6), условия на величины r_0, v_0, при выполнении которых шарик не может удариться о стенку (в противном случае модель (5) неверна, так как при соударении со стенкой шарик испытывает с ее стороны действие некоторой силы, не учитываемой в уравнении (5)).

§ 3. Вариационные принципы и математические модели

Дадим упрощенную формулировку вариационного принципа Гамильтона для механической системы. На его основе выведем уравнения движения шарика на пружине и маятника в поле сил тяжести. Сопоставим результаты получения моделей из фундаментальных законов и из вариационного принципа.

1. Общая схема принципа Гамильтона. Пусть имеется механическая система, формального и строгого определения которой пока давать не будем, имея в виду, однако, что все взаимодействия между элементами такой системы определяются законами механики (один из простейших примеров — рассмотренная в п. 4 § 2 система «шарик—пружина»). Введем понятие *обобщенных координат* $Q(t)$, полностью определяющих положение механической системы в пространстве. Величина $Q(t)$ может быть декартовой координатой (например, координата r в системе «шарик—пружина»), радиусом-вектором, угловой координатой, набором координат материальных точек, составляющих систему, и т. д. Величину dQ/dt естественно назвать *обобщенной скоростью* механической системы в момент времени t. Набор величин $Q(t)$ и dQ/dt определяет состояние механической системы во все моменты времени.

Для описания механической системы вводится *функция Лагранжа*, построение которой — отдельный вопрос, более подробно рассматриваемый в гл. III. В простейших случаях функция Лагранжа имеет ясный смысл и записывается в виде

$$L(Q, dQ/dt) = E_{\text{к}} - E_{\text{п}}, \tag{1}$$

где $E_{\text{к}}$, $E_{\text{п}}$ — кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно. Для целей данного параграфа нет необходимости давать общее определение величин $E_{\text{к}}$, $E_{\text{п}}$, поскольку в рассматриваемых примерах они вычисляются очевидным образом.

Введем далее величину $S[Q]$, называемую *действием*:

$$S[Q] = \int\limits_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) dt. \tag{2}$$

Интеграл (2), очевидно, является функционалом от обобщенной координаты $Q(t)$, т. е. функции $Q(t)$, заданной на отрезке $[t_1, t_2]$, он ставит в соответствие некоторое число S (действие).

Принцип Гамильтона для механической системы гласит: если система движется по законам механики, то $Q(t)$ — стационарная функция для $S[Q]$, или

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[Q + \varepsilon\varphi]_{\varepsilon=0} = 0. \tag{3}$$

Фигурирующая в *принципе наименьшего действия* (3) функция $\varphi(t)$ — некоторая пробная функция, обращающаяся в нуль в моменты t_1, t_2 и удовлетворяющая тому условию, что $Q(t) + \varepsilon\varphi(t)$ — возможная координата данной системы (в остальном $\varphi(t)$ произвольна).

Смысл принципа (3) в том, что из всех априори мыслимых (допускаемых) траекторий (движений) системы между моментами t_1, t_2 выбирается (реализуется) движение, доставляющее минимум функционалу действия (отсюда происходит и название принципа). Функция $\varepsilon\varphi(t)$ называется *вариацией* величины $Q(t)$.

Итак, схема применения принципа Гамильтона (3) для построения моделей механических систем состоит в следующем: определяются обобщенные координаты $Q(t)$ и обобщенные скорости dQ/dt системы, строятся функция Лагранжа $L(Q, dQ/dt)$ и функционал действия $S[Q]$, минимизация которого на вариациях $\varepsilon\varphi(t)$ координаты $Q(t)$ и дает искомую модель.

2. Третий способ получения модели системы «шарик—пружина». Воспользуемся принципом Гамильтона для построения модели движения шарика, соединенного с пружиной (п. 4 § 2). В качестве обобщенной координаты системы естественно выбрать обычную эйлерову координату шарика $r(t)$. Тогда обобщенная скорость

$dr/dt = v(t)$ — обычная скорость шарика. Функция Лагранжа (1), равная $L = E_{\text{к}} - E_{\text{п}}$, записывается через уже найденные в п. 4 § 2 значения кинетической и потенциальной энергии системы:

$$L = \frac{m\,(dr/dt)^2}{2} - k\,\frac{r^2}{2}\,.$$

Для величины действия получаем выражение

$$S[r] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(r, \frac{dr}{dt}\right)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{k}{2}\,r^2\right]dt.$$

Теперь, в соответствии со схемой п. 1, вычислим действие на вариациях $\varepsilon\varphi(t)$ координаты $r(t)$:

$$S[r+\varepsilon\varphi] = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{d(r+\varepsilon\varphi)}{dt}\right)^2 - \frac{k}{2}\,(r+\varepsilon\varphi)^2\right]\,dt.$$

Последнюю формулу необходимо продифференцировать по ε (учитывая, что функции r, φ, dr/dt, $d\varphi/dt$ от ε не зависят):

$$\frac{d}{d\varepsilon}\,S[r+\varepsilon\varphi] = \frac{d}{d\varepsilon}\,\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + 2\varepsilon\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} - \right.$$

$$\left. - k\left\{r^2 + 2\varepsilon r\varphi + \varepsilon^2\varphi^2\right\}\right]dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left[m\left\{\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} - k\left\{r\varphi + \varepsilon\varphi^2\right\}\right]dt,$$

и положить в ней $\varepsilon = 0$:

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\,S[r+\varepsilon\varphi]\right|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2}\left[m\,\frac{dr}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} - kr\varphi\right]dt = 0.$$

Правая часть этого выражения (равного нулю в согласии с принципом Гамильтона — см. (3)) с помощью интегрирования ее первого члена по частям и с учетом того, что $\varphi = 0$ в моменты t_1, t_2, преобразуется к виду

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\,S[r+\varepsilon\varphi]\right|_{\varepsilon=0} = -\int_{t_1}^{t_2}\varphi\left[m\,\frac{d^2r}{dt^2} + kr\right]dt = 0.$$

Поскольку пробная функция $\varphi(t)$, фигурирующая в формулировке принципа наименьшего действия, произвольна, то часть выражения, стоящая под знаком интеграла в квадратных скобках, должна быть равна нулю во все моменты времени $t_1 < t < t_2$:

$$m\,\frac{d^2r}{dt^2} = -kr,$$

т. е. движение системы должно описываться уравнением (5), полученным в § 2 из закона Ньютона (первый способ) и закона сохранения энергии (второй способ). Все три подхода оказываются эквивалентными (так как между ними существует глубокая связь, более подробно изучаемая в гл. III).

3. Колебания маятника в поле сил тяжести. Приведем несколько более сложный пример применения принципа Гамильтона с подробным рассмотрением начальной стадии построения модели — описанием механической системы.

Пусть на неподвижном шарнире подвешен маятник — груз массы m, находящийся на конце стержня длины l (рис. 12). Шарнир считается идеально гладким в том смысле, что в нем не происходят потери энергии на трение. Неподвижность шарнира означает, что от него энергия в систему «стержень—груз» не поступает, такой шарнир неспособен совершить над ней какую-либо работу. Стержень считается невесомым и абсолютно жестким, т. е. его кинетическая и потенциальная энергии равны нулю, а груз не может совершать движений вдоль оси стержня. Груз имеет небольшие размеры по сравнению с длиной стержня (материальная точка), ускорение свободного падения g постоянно, сопротивлением воздуха пренебрегается, колебания происходят в фиксированной вертикальной плоскости (для чего, очевидно, вектор начальной скорости груза должен лежать в этой плоскости).

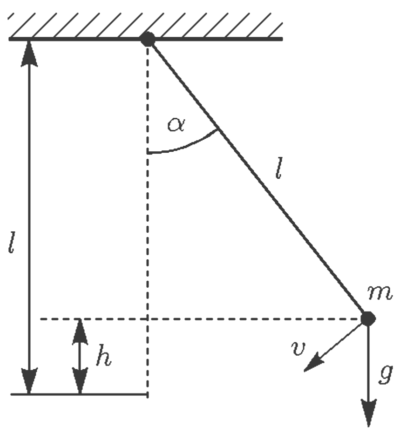

Рис. 12

После всех этих упрощающих предположений ясно, что положение маятника определяется лишь одной обобщенной координатой, в качестве которой выберем угол $\alpha(t)$ отклонения стержня от вертикали. Обобщенная скорость в данном случае — угловая скорость $d\alpha/dt$.

Кинетическая энергия системы дается формулой

$$E_\text{к} = \frac{1}{2}\,mv^2 = \frac{1}{2}\,m\left(l\,\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\,ml^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2,$$

а потенциальная энергия выражением

$$E_\text{п} = mgh = -mg\,(l\cos\alpha - l),$$

где h — отклонение маятника от наинизшего положения по вертикали. В дальнейших выкладках величину mgl в $E_\text{п}$ опустим, так как потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной.

Теперь нетрудно вычислить функцию Лагранжа (1) и действие (2):

$$L\left(\alpha, \frac{d\alpha}{dt}\right) = ml\left[\frac{1}{2}\,l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + g\cos\alpha\right],$$

$$S[\alpha] = ml\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}\,l\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + g\cos\alpha\right]dt.$$

Находя действие на вариациях $\alpha + \varepsilon\varphi(t)$:

$$S[\alpha+\varepsilon\varphi] = ml\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}\,l\left(\frac{d\alpha}{dt} + \varepsilon\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + g\cos(\alpha+\varepsilon\varphi)\right]dt =$$

$$= ml\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + 2\varepsilon\,\frac{d\alpha}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} + \varepsilon^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} + g\cos(\alpha+\varepsilon\varphi)\right]dt,$$

дифференцируя его по ε и полагая $\varepsilon = 0$, получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon}\,S[\alpha+\varepsilon\varphi]\bigg|_{\varepsilon=0} = ml\int\limits_{t_1}^{t_2}\left[l\,\frac{d\alpha}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} - \varphi g\sin\alpha\right]dt = 0.$$

Как и в п. 1, интегрируем первый член выражения в скобках по частям и, учитывая, что $\varphi(t) = 0$ в моменты t_1, t_2, приходим к следующему уравнению:

$$ml\int\limits_{t_1}^{t_2}\varphi\left[l\,\frac{d^2\alpha}{dt^2} + g\sin\alpha\right]dt = 0,$$

которое в силу произвольности $\varphi(t)$ может удовлетворяться лишь если для всех $t_1 < t < t_2$ справедливо

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\,\frac{g}{l}\,\sin\alpha. \tag{4}$$

Заметим, что уравнение колебаний маятника (4) в отличие от уравнения (5) § 2 нелинейно. Это обстоятельство связано с более сложной геометрией системы «стержень—груз», а именно: ускорение, испытываемое грузом, не пропорционально координате, как в случае закона Гука, а является более сложной функцией отклонения от положения равновесия (угла α). Если же эти отклонения малы, то $\sin\alpha \approx \alpha$, и модель малых колебаний линейна:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\,\frac{g}{l}\,\alpha.$$

Они описываются формулой, аналогичной (6) из § 2, где $\omega = \sqrt{g/l}$ — собственная частота малых колебаний, а величины A, B определяются через $\alpha(t=0)$, $\dfrac{d\alpha}{dt}(t=0)$.

4. Заключение. Примеры использования принципа Гамильтона для построения моделей механических систем рисуют весьма четкую программу действий, в общем виде описанную в п. 1. Универсальность, строго формализованные последовательные процедуры, не зависящие от деталей конкретной системы, безусловно, весьма привлекательная черта вариационных принципов. В приведенных выше простых случаях модели могут быть относительно легко получены и иными способами. Однако для многих других, более сложных объектов, вариационные принципы оказываются фактически единственным методом построения моделей. Так, например, механические части большинства робототехнических устройств состоят из большого количества разнообразных элементов, связанных между собой различными способами. Их математические модели включают большое число уравнений, единообразно получаемых в основном с помощью вариационных принципов. Этот подход успешно применяется также и для систем иной природы (физических, химических, биологических), для которых формулируются соответствующие общие утверждения о характере их эволюции (поведения).

То обстоятельство, что принцип Гамильтона и другие подходы дают совпадающие модели, естественно, поскольку они описывают один и тот же исходный объект. Разумеется, такое совпадение гарантировано только при одних и тех же исходных предположениях об объекте. Если его идеализация (как один из первых этапов построения модели) проводится одинаково, то разные способы получения моделей должны давать тождественные результаты. Пусть, например, в системе «шарик—пружина» появляется дополнительная постоянная сила некоторого внешнего воздействия на шарик F_0. Тогда из второго закона Ньютона нетрудно получить уравнение движения шарика

$$m\,\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F_0$$

(ср. с (5) § 2). Применяя принцип Гамильтона к такой системе, необходимо учесть наличие этой силы. Очевидно, что определения обобщенной координаты, обобщенной скорости и кинетической энергии $E_{\text{к}}$ остаются неизменными. В то же время выражение для потенциальной энергии существенно изменяется (ср. с п. 2) на величину, равную работе, произведенной этой силой над системой:

$$E_{\text{п}} = k\,\frac{r^2}{2} + \int\limits_0^r F_1\,dr = k\,\frac{r^2}{2} + F_0 r.$$

Проводя аналогичные п. 2 выкладки с соответствующим образом измененными величинами L и Q, нетрудно убедиться в том, что принцип Гамильтона дает написанное выше уравнение с внешней силой F_0.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Проверьте, что модель (4) построена правильно, получив ее с помощью второго закона Ньютона.

2. Используя результаты п. 2 § 2 и принцип Гамильтона, постройте модель колебаний маятника в электрическом поле, создаваемом заряженной горизонтальной плоскостью, над которой подвешен маятник. Заряд груза равен q, поверхностная плотность зарядов на плоскости равна $-q_0$ (силой тяжести пренебречь). Почему, несмотря на различную природу действующих сил, получается модель, аналогичная (4)?

§ 4. Пример иерархии моделей

Для движения шарика, соединенного с пружиной, построим иерархическую цепочку моделей по принципу «снизу вверх». Последовательно введем новые усложняющие факторы и дадим их математическое описание.

1. Различные варианты действия заданной внешней силы. Пусть на шарик действует известная внешняя сила $F(r,t)$, зависящая от времени и положения шарика. Она может порождаться полем тяготения (см. упр. 1), иметь электрическое или магнитное происхождение и т. д. Из второго закона Ньютона сразу получаем, что по сравнению с базовой моделью колебаний

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr \tag{1}$$

в правой части уравнения (1) появляется дополнительный член:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(r,t). \tag{2}$$

Простейший вариант уравнения (2) отвечает постоянной силе $F(r,t) = F_0$. Проведя замену $\bar{r} = r - F_0/k$, получаем для $\bar{r}$

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = -k\bar{r},$$

т. е. постоянная сила не вносит изменений в процесс колебаний за тем исключением, что координата нейтральной точки, в которой сила, действующая на шарик, равна нулю, сдвигается на величину F_0/k.

Гораздо более сложная картина движения может порождаться зависящей от времени силой $F(t)$. Рассмотрим для определенности периодическую внешнюю силу $F(t) = F_0\sin\omega_1 t$:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr + F(t) = -kr + F_0\sin\omega_1 t. \tag{3}$$

Решение линейного уравнения (3) находится как сумма общего решения однородного уравнения (формула (6) § 2) и частного решения неоднородного уравнения (3), которое будем искать в виде

$$r_1(t) = C\sin\omega_1 t. \tag{4}$$