Московский авиационный институт (государственный ТЕХнический университет)

Факультет прикладной математики

РГР по курсу «Теория игр»

Преподаватель: Т. И. Короткова
Студенты: И. К. Никитин

Москва, 2010

Содержание

1. Модель экспорта рыбы

1.1. Задача

Необходимо составить математическую модель для экспорта товара, (производства, продажи услуг ...). Цель — максимизация прибыли.

1.2. Конкретизация задачи

Пусть мы и некий обобщенный конкурент производим экспортную продукцию. Для определенности будем рассматривать рыболовную промышленность.

Пусть n — количество видов продаваемой рыбы, набор разновидностей у нас и конкурента одинаковый (либо они взаимозаменяемы, но нет сектора, в котором у кого-либо из участников была бы монополия [мы это не рассматриваем]), у каждого (i-го) вида товаров есть параметры:

	произведено	**цена**
Мы	x_i	p_i
Конкурент	y_i	r_i

Ограничения:

- C — количество денег на рынке (сколько могут потратить покупатели).
- $k_i, \quad i=\overline{1,n}$ — ограничение спроса на продукцию (т.е. будет куплено не более этого количества).
- З — затраты

Задача: $П \to \max$, $П$ — продажи.

Дополнительные обозначения:

- $\widetilde{y_i}$ — количество товаров i-го вида, произеденное конкурентом, имеющее преимущество над нашим товаром того же вида.
- $\widetilde{k_i}$ — «чистый» спрос на нашу продукцию (с учетом преимуществ конкурента).

- $\widetilde{x}_i$ — сколько мы сможем продать.
- $\widetilde{C}_i$ — выручка конкурента.
- $\bar{C}_i$ — наша выручка.

Нам нужно посчитать разные оценки эффективности стратегий для этой модели.

1.3. Общая Модель

Определим $F(X, Y)$.

$$F(X, Y) \to \max_X$$

- F — цель;
- X — стратегии (инновации, нововведения, методы эксплуатации);
- Y — неконтролируемые факторы

В данном случае:

$$X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$$

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$$

- Y^1 — неопределенные факторы с известной областью изменения:
$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_i \\ r_i \end{pmatrix};$$
- Y_2 — случайные факторы с известным законом распределения;
- Y_3 — непредсказуемые факторы (законы природы, Force majeure).

Пусть $\inf_Y F(x_i, p_i, y_i, r_i) = \Pi$ — прибыль, без учета случайных и неконтролируемых факторов.

1.4. Случайные факторы

Южное колебание El Niño — это глобальное океано-атмосферное явление, представляют собой температурные флуктуации поверхностных вод в тропиках восточной части Тихого океана. Вдоль восточного побережья Южной Америки El Niño уменьшает апвеллинг (поднятие с глубин) холодной, богатой планктоном воды, которая поддерживает большие популяции рыбы. Локальная рыбопромысловая индустрия вдоль береговой линии может испытывать недостаток рыбы во время продолжительных событий El Niño.

Пусть вероятность происшествия события El Niño 7%. Когда произошло событие El Niño, будем считать, что рыбы нет. И мы ничего не производим $\Phi_1(X) = \inf_{Y \in N} F(X, Y) = 0$. Тогда:

$$\Phi_3(X) = \int \dots \int \inf_{Y1} F(X, Y) d \dots df(Y^{2i}) = 0 + \frac{93}{100} \Pi$$

1.5. Непредсказуемые факторы

Будем считать **шторм** непредсказуемые фактором (допустим, предупреждать шторм мы не научились). Во время шторма, мы теряем половину рыболовецких кораблей (моряки спасаются). Тогда:

$$\Phi_4(X) = \inf_{Y1 \in N} \inf_{\alpha \in N^\alpha} F(X, Y^1, \alpha) = \frac{1}{2} \Pi$$

К неконтролируемым факторам можно так же отнести нападения морских пиратов. Здесь мы это рассматривать не будем.

1.5.1. Зависимость факторов друг от друга

Случайные и непредсказуемые факторы могут зависеть друг от друга. Допустим, шторм происходит после события El Niño. Но при этом, фактор шторма выводится из класса непредсказуемые факторов и становится случайным.

1.6. Итоговая оценка

$$\Phi(X) = \frac{1}{2} \int \dots \int \inf_{Y1} F(X, Y^1, Y^2) df(Y^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{93}{100} \Pi$$

2. Коалиционные игры

2.1. Задача

Составим платежную матрицу(мы ее придумали):

				I	II	III	IV
α_1	β_1	γ_1	δ_1	-2	1	1	0
α_1	β_1	γ_1	$\delta_\mathbf{2}$	1	1	-1	-1
α_1	β_1	$\gamma_\mathbf{2}$	δ_1	1	0	-2	1
α_1	β_1	$\gamma_\mathbf{2}$	$\delta_\mathbf{2}$	0	-2	1	1
α_1	$\beta_\mathbf{2}$	γ_1	δ_1	0	1	1	-2
α_1	$\beta_\mathbf{2}$	γ_1	$\delta_\mathbf{2}$	1	1	-2	0
α_1	$\beta_\mathbf{2}$	$\gamma_\mathbf{2}$	δ_1	1	-2	0	1
α_1	$\beta_\mathbf{2}$	$\gamma_\mathbf{2}$	$\delta_\mathbf{2}$	-2	0	1	1
$\alpha_\mathbf{2}$	β_1	γ_1	δ_1	-4	2	2	0
$\alpha_\mathbf{2}$	β_1	γ_1	$\delta_\mathbf{2}$	2	2	0	-4
$\alpha_\mathbf{2}$	β_1	$\gamma_\mathbf{2}$	δ_1	2	0	-4	2
$\alpha_\mathbf{2}$	β_1	$\gamma_\mathbf{2}$	$\delta_\mathbf{2}$	0	-4	2	2
$\alpha_\mathbf{2}$	$\beta_\mathbf{2}$	γ_1	δ_1	0	2	2	-4
$\alpha_\mathbf{2}$	$\beta_\mathbf{2}$	γ_1	$\delta_\mathbf{2}$	2	2	-2	-2
$\alpha_\mathbf{2}$	$\beta_\mathbf{2}$	$\gamma_\mathbf{2}$	δ_1	2	-4	0	2
$\alpha_\mathbf{2}$	$\beta_\mathbf{2}$	$\gamma_\mathbf{2}$	$\delta_\mathbf{2}$	-4	0	2	2

Нужно найти решение различных коалиционных игр. Для каждой коалиционной игры решение желательно искать разными способами.

> Важно отметить, что не все приведенные игры решены корректно. Перед решением любой матричной игры необходимо упростить матрицы, убрать из них заведомо не эффективные стратегии. Мы этого не делаем. В данном случае, мы выбрали слишком «простую» платежную матрицу. И решая все «правильно» мы не смогли бы показать методы.

2.2. Игры 1×3

2.2.1. I против II, III, IV

	$\beta_1, \gamma_1, \delta_1$	$\beta_1, \gamma_1, \delta_2$	$\beta_1, \gamma_2, \delta_1$	$\beta_1, \gamma_2, \delta_2$	$\beta_2, \gamma_1, \delta_1$	$\beta_2, \gamma_1, \delta_2$	$\beta_2, \gamma_2, \delta_1$	$\beta_2, \gamma_2, \delta_2$
α_1	-2	1	1	0	0	1	1	-2
α_2	-4	2	2	0	0	2	2	-4

Найдем максимин и минимакс.
Нижняя цена игры (максимин):

$$\alpha = v_{11} = \max_{\alpha_1,\alpha_2} \min_{\beta_i,\gamma_j,\delta_k}$$

$$= \max_{\alpha_1,\alpha_2}\{ \min_{\beta_i,\gamma_j,\delta_k} \{-2, 1, 1, 0, 0, 1, 1, -2\}, \min_{\beta_i,\gamma_j,\delta_k} \{-4, 2, 2, 0, 0, 2, 2, -4\}\}$$

$$= \max_{\alpha_1,\alpha_2}\{-4, -2\} = -2$$

Верхняя цена игры (минимакс):

$$\beta = v_{12} = \min_{\beta_i,\gamma_j,\delta_k} \max_{\alpha_1,\alpha_2} = \min_{\beta_i,\gamma_j,\delta_k} \{\max_{\alpha_1,\alpha_2}\{-2, -4\}, \max_{\alpha_1,\alpha_2}\{1, 2\}, \max_{\alpha_1,\alpha_2}\{0, 0\}, \} = -2$$

Легко заметить:

$$\alpha = \beta$$

Игра имеет решение в чистых стратегиях, т.к. верхняя и нижняя цена игры совпадают.
Для первого игрока оптимальна стратегий α_1. Для остальных в раной степени применимы:

- $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$
- $\beta_2, \gamma_2, \delta_2$

2.2.2. II против I, III, IV

	$\alpha_1,\gamma_1,\delta_1$	$\alpha_1,\gamma_1,\delta_2$	$\alpha_1,\gamma_2,\delta_1$	$\alpha_1,\gamma_2,\delta_2$	$\alpha_2,\gamma_1,\delta_1$	$\alpha_2,\gamma_1,\delta_2$	$\alpha_2,\gamma_2,\delta_1$	$\alpha_2,\gamma_2,\delta_2$
β_1	1	1	0	-2	2	2	0	-4
β_2	1	1	-2	0	2	2	-4	0

Найдем максимин и минимакс. Нижняя цена игры (максимин):

$$v_{21} = \max_{\beta_1,\beta_2} \min_{\alpha_i,\gamma_j,\delta_k} = -4$$

Верхняя цена игры (минимакс):

$$v_{22} = \min_{\alpha_i,\gamma_j,\delta_k} \max_{\beta_1,\beta_2} = 0$$

К сожалению, оказалось, что

$$v_{21} \neq v_{22}$$

Игра не имеет решения в чистых стратегиях. Придется искать решение в смешанных стратегиях. Упростим коалиционную матрицу. Вычеркнем заведем худшие для коалиции (α, γ, δ). В итоге получим матрицу:

	$\alpha_2,\gamma_2,\delta_1$	$\alpha_2,\gamma_2,\delta_2$
β_1	0	-4
β_2	-4	0

Если

- p_1^* — вероятность применения первой стратегии
- p_2^* — вероятность применения второй стратегии

то, можно найти вероятности применения стратегий по формулам:

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v \quad \leftarrow \text{при стратегии } \beta_1$$

$$a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v \quad \leftarrow \text{при стратегии } \beta_2$$

Принимая во внимание, что $p_1^* + p_2^* = 1$, в итоге получим:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0 - (-4)}{0 + 0 - (-4) - (-4)} = \frac{1}{2}$$

$$p_2^* = \frac{1}{2}$$

Таким образом оптимальная стратегия игрока β:

$$S^*_\beta = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

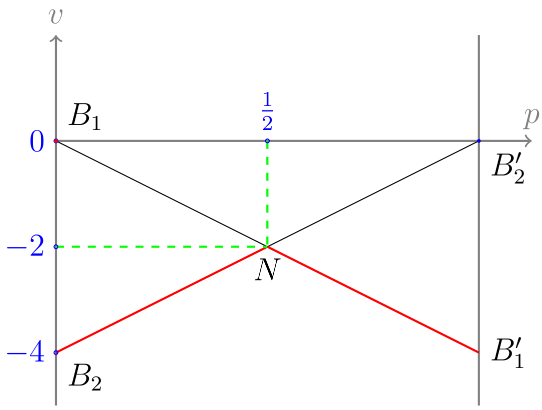
Оптимальная стратегия для коалиции ищется аналогично:

$$S^*_{(\alpha,\gamma,\delta)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

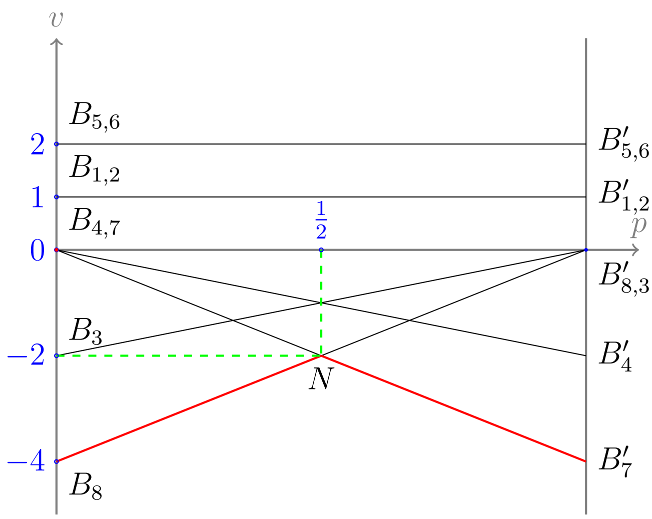
Найдем цену игры:

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0 - 16}{8} = -2$$

Найдем тоже самое решение графически



Решение можно было искать не упрощая матрицу. Только это несколько не рационально. Мы все равно получим правильный ответ.



2.2.3. III против I, II, IV

	$\alpha_1, \beta_1, \delta_1$	$\alpha_1, \beta_1, \delta_2$	$\alpha_1, \beta_2, \delta_1$	$\alpha_1, \beta_2, \delta_2$	$\alpha_2, \beta_1, \delta_1$	$\alpha_2, \beta_1, \delta_2$	$\alpha_2, \beta_2, \delta_1$	$\alpha_2, \beta_2, \delta_2$
γ_1	1	-1	1	-2	2	0	2	-2
γ_2	-2	1	0	1	-4	2	0	2

Найдем максимин и минимакс. Нижняя цена игры (максимин):

$$v_{31} = \max_{\gamma_1,\gamma_2} \min_{\alpha_i,\beta_j,\delta_k} = -2$$

Верхняя цена игры (минимакс):

$$v_{32} = \min_{\alpha_i,\beta_j,\delta_k} \max_{\gamma_1,\gamma_2} = 1$$

К сожалению, оказалось, что

$$v_{31} \neq v_{32}$$

Игра не имеет решения в чистых стратегиях. Придется искать решение в смешанных стратегиях.

Зададим вероятностные вектора для третьего игрока и для его противников:

- Для третьего игрока

$$P = (p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2})$$

- Для коалиции

$$Q = (q_{\alpha_1,\beta_1,\delta_1}, q_{\alpha_1,\beta_1,\delta_2}, q_{\alpha_1,\beta_2,\delta_1}, q_{\alpha_1,\beta_2,\delta_2}, q_{\alpha_1,\beta_1,\delta_1}, q_{\alpha_2,\beta_1,\delta_2}, q_{\alpha_2,\beta_2,\delta_1}, q_{\alpha_2,\beta_2,\delta_2})$$

Будем решать игру методом Брауна. Метод Брауна — итерационный. Для того, чтобы он когда-нибудь остановился, нужно задать условия окончания. Мы явно ограничим число итераций. Пусть будет 9 итераций.

> Вообще говоря, задачу подобного класса не стоит решать методом Брауна. Более того, перед вообще каким либо решением задачу следует упростить. И матрица игры сведется к матрице 2×2. Но в данном случае, мы хотели проиллюстрировать сам метод Брауна. Отчасти, мы используем этот метод здесь из любопытства. Не известно какой результат мы получим.

Сделаем все элементы матрицы положительными. Для это прибавим к каждому элементу матрицы число 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 1 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

k	i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	j	A_1	A_2	$\underline{v}$	$\overline{v}$	v
1	2	6	4	6	$\underline{3}$	7	5	7	3	4	3	$\overline{6}$	3.0000	6.0000	4.5000
2	1	9	10	11	9	$\underline{8}$	12	12	10	5	$\overline{10}$	7	4.0000	5.0000	4.5000
3	1	15	14	17	$\underline{12}$	15	17	19	13	4	$\overline{13}$	13	4.0000	4.3333	4.1667
4	2	21	18	23	$\underline{15}$	22	22	26	16	4	16	$\overline{19}$	3.7500	4.7500	4.2500
5	2	24	24	28	$\underline{21}$	23	29	31	23	4	19	$\overline{25}$	4.2000	5.0000	4.6000
6	1	27	30	33	27	$\underline{24}$	36	36	30	5	$\overline{26}$	26	4.0000	4.3333	4.1667
7	2	33	34	39	$\underline{30}$	31	41	43	33	4	29	$\overline{32}$	4.2857	4.5714	4.4286
8	1	36	40	44	36	$\underline{32}$	48	48	40	5	$\overline{36}$	33	4.0000	4.5000	4.2500
9	1	42	44	50	$\underline{39}$	39	53	55	43	4	$\overline{39}$	39	4.3333	4.3333	4.3333

Это решение было получено численно. Легко, догадаться:

$$4.3333 = 4\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$$

Это означает, что предварительная цена игры $\widetilde{v} = \dfrac{13}{3}$. Но это не будет действительной ценой игры.

> Вспомним, что до составления применения метода мы прибавили к каждому элементу начальной матрицы число 5. Теперь для получения настоящей цены игры его надо отнять от $\widetilde{v}$.

Таким образом получим:

$$v = \widetilde{v} - 5 = \frac{13}{3} - 5 = \frac{13}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{2}{3}$$

Вероятностные вектора для третьего игрока и для его противников будут:

- Для третьего игрока

$$P = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)$$

- Для коалиции

$$Q = \left(0, 0, 0, \frac{6}{9}, \frac{3}{9}, 0, 0, 0, \right)$$

Вообще говоря, результат выглядит странно, но он соответствует ожиданиям. Повторимся, задачи подобного класса не стоит решать методом Брауна.

Запишем итоговый результат:

$$P = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right)$$

$$Q = \left(0, 0, 0, \frac{6}{9}, \frac{3}{9}, 0, 0, 0, \right)$$

$$v = -\frac{2}{3}$$

2.2.4. IV против I, II, III

	$\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$	$\alpha_1,\beta_1,\gamma_2$	$\alpha_1,\beta_2,\gamma_1$	$\alpha_1,\beta_2,\gamma_2$	$\alpha_2,\beta_1,\gamma_1$	$\alpha_2,\beta_1,\gamma_2$	$\alpha_2,\beta_2,\gamma_1$	$\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$
δ_1	0	1	-2	1	0	2	-4	2
δ_2	-1	1	0	1	-4	2	0	2

Найдем максимин и минимакс.

$$v_{41} = \max_{\delta_1,\delta_2}\ \min_{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k} = -4$$

$$v_{42} = \min_{\alpha_i,\beta_j,\gamma_k}\ \max_{\delta_1,\delta_2} = -2$$

К сожалению, оказалось, что

$$v_{31} \neq v_{32}$$

Игра не имеет решения в чистых стратегиях. Придется искать решение в смешанных стратегиях. Упростим коалиционную матрицу. Вычеркнем заведем худшие для коалиции (α,β,γ). В итоге получим матрицу:

	$\alpha_2,\beta_1,\gamma_1$	$\alpha_2,\beta_2,\gamma_1$
δ_1	0	-4
δ_2	-4	0

Если

- p_1^* — вероятность применения первой стратегии
- p_2^* — вероятность применения второй стратегии

то, можно найти вероятности применения стратегий по формулам:

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v \quad \leftarrow \text{при стратегии } \delta_1$$

$$a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v \quad \leftarrow \text{при стратегии } \delta_2$$

Принимая во внимание, что $p_1^* + p_2^* = 1$, в итоге получим:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0 - (-4)}{0 + 0 - (-4) - (-4)} = \frac{1}{2}$$

$$p_2^* = \frac{1}{2}$$

Таким образом оптимальная стратегия игрока β:

$$S_\delta^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Оптимальная стратегия для коалиции ищется аналогично:

$$S_{(\alpha,\beta,\gamma)}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Найдем цену игры:

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0 - 16}{8} = -2$$

2.3. Игры 2×2

2.3.1. I, II против III, IV

Суммируя выигрыши противоборствующих коалиций получим:

	γ_1, δ_1	γ_1, δ_2	γ_2, δ_1	δ_2, γ_2
α_1, β_1	-1	2	1	-2
α_1, β_2	1	2	-1	-2
α_2, β_1	-2	4	2	-4
α_2, β_2	2	4	-2	-4

- Нижняя цена игры (максимин):

$$v_{51} = -2$$

- Верхняя цена игры (минимакс):

$$v_{52} = -2$$

Легко заметить:

$$v_{51} = v_{52}$$

Игра имеет решение в чистых стратегиях, т.к. верхняя и нижняя цена игры совпадают.
Для первого и второго игрока в равной степени приемлемы:

- α_2, β_1,
- α_1, β_1,
- α_1, β_2,
- α_2, β_2,

Для третьего и четвертого оптимальной будет стратегия δ_2, γ_2.

2.3.2. I, III против II, IV

Суммируя выигрыши противоборствующих коалиций получим:

	β_1, δ_1	β_1, δ_2	β_2, δ_1	β_2, δ_2
α_1, γ_1	-1	0	1	-1
α_1, γ_2	-1	1	1	-1
α_2, γ_1	-2	2	2	0
α_2, γ_2	-2	2	2	-2

- Нижняя цена игры (максимин):

$$v_{61} = -1$$

- Верхняя цена игры (минимакс):

$$v_{62} = -1$$

Легко заметить:

$$v_{61} = v_{62}$$

Игра имеет решение в чистых стратегиях, т.к. верхняя и нижняя цена игры совпадают.
Для первого и третьего игрока оптимальной будет стратегия: α_1, γ_1 Для третьего и четвертого игрока оптимальной будет стратегия: β_1, δ_1

2.3.3. I, IV против II, III

Суммируя выигрыши противоборствующих коалиций получим:

	β_1, γ_1	β_1, γ_2	β_2, γ_1	β_2, γ_2
α_1, δ_1	-2	2	-2	2
α_1, δ_2	0	1	1	-1
α_2, δ_1	-4	4	-4	4
α_2, δ_2	-2	2	0	-2

- Нижняя цена игры (максимин):

  $$v_{71} = -1$$

- Верхняя цена игры (минимакс):

  $$v_{72} = 0$$

Игра не имеет решения в чистых стратегиях. Придется искать решение в смешанных стратегиях.

- Вероятностный вектор применения стратегий игроков α и δ:

  $$P = (p_{\alpha_1,\delta_1}, p_{\alpha_1,\delta_2}, p_{\alpha_2,\delta_1}, p_{\alpha_2,\delta_2})$$

- Вероятностный вектор применения стратегий игроков β и γ:

  $$Q = (q_{\beta_1,\gamma_1}, q_{\beta_1,\gamma_2}, q_{\beta_2,\gamma_1}, q_{\beta_2,\gamma_2})$$

Попробуем решить задачу, сведя ее к ЗЛП[1] Сделаем все элементы матрицы положительными. Для это прибавим к каждому элементу матрицы число 5.

$A + 5 \cdot E;$ где E — матрица из единиц

	β_1, γ_1	β_1, γ_2	β_2, γ_1	β_2, γ_2
α_1, δ_1	3	7	3	7
α_1, δ_2	5	6	6	4
α_2, δ_1	1	9	1	9
α_2, δ_2	3	7	5	3

[1] Задача линейного программирования

Если записать просто матрицу, то

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 6 & 4 \\ 1 & 9 & 1 & 9 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

В качестве прямой задачи возьмем задачу определения оптимальной стратегии игроков β, γ:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 & \to & \max \\ 3y_1 + 7y_2 + 3y_3 + 7y_4 & \leqslant & 1 \\ 5y_1 + 6y_2 + 6y_3 + 4y_4 & \leqslant & 1 \\ 1y_1 + 9y_2 + 1y_3 + 9y_4 & \leqslant & 1 \\ 3y_1 + 7y_2 + 5y_3 + 3y_4 & \leqslant & 1 \end{cases}$$

Приведем к каноническому виду:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 & \to & \max \\ 3y_1 + 7y_2 + 3y_3 + 7y_4 + y_5 & = & 1 \\ 5y_1 + 6y_2 + 6y_3 + 4y_4 + y_6 & = & 1 \\ 1y_1 + 9y_2 + 1y_3 + 9y_4 + y_7 & = & 1 \\ 3y_1 + 7y_2 + 5y_3 + 3y_4 + y_8 & = & 1 \end{cases}$$

Шаг 0

		1	1	1	1	0	0	0	0
БП	БР	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
y_5	1	3	7	3	7	1	0	0	0
y_6	1	5	6	6	4	0	1	0	0
y_7	1	1	9	1	9	0	0	1	0
y_8	1	3	7	5	3	0	0	0	1
ИС	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0

Шаг 1

		1	1	1	1	0	0	0	0
БП	БР	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
y_5	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{17}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{23}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	0	0
y_1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0
y_7	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{39}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{41}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	0
y_8	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{17}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0	1
ИС	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0

Шаг 2

		1	1	1	1	0	0	0	0
БП	БР	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
y_4	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{17}{23}$	$-\frac{3}{23}$	1	$\frac{5}{23}$	$-\frac{3}{23}$	0	0
y_1	$\frac{3}{23}$	1	$\frac{14}{23}$	$\frac{30}{23}$	0	$-\frac{4}{23}$	$\frac{7}{23}$	0	0
y_7	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{40}{23}$	$\frac{20}{23}$	0	$-\frac{41}{23}$	$\frac{20}{23}$	1	0
y_8	$\frac{8}{23}$	0	$\frac{68}{23}$	$\frac{34}{23}$	0	$-\frac{3}{23}$	$-\frac{12}{23}$	0	1
ИС	$\frac{5}{23}$	0	$\frac{8}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$\frac{1}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	0

Данная задача имеет оптимальное решение

$$Y^* = \begin{matrix} \frac{3}{23} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{23} \end{matrix}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{5}{23}$$

Так как ЗЛП по определению оптимальной стратегии игрока является двойственной по отношению к рассмотренной, то решение можно найти, используя решение прямой задачи Y^*:

$$X^* = C_B \cdot P^{-1}$$

где C_B - вектор-строка, составленная из коэффициентов целевой функции при базисных переменных.

$$C_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- матрица, составленная из коэффициентов, расположенных в столбцах базисных переменных в начальной симплекс-таблице.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

После не сложных преобразований получим:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{23} & \frac{7}{23} & 0 & 0 \\ \frac{5}{23} & -\frac{3}{23} & 0 & 0 \\ -\frac{41}{23} & \frac{20}{23} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{23} & -\frac{12}{23} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^* = (1,1,0,0)\cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (1,1,0,0)\cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{23} & \frac{7}{23} & 0 & 0 \\ \frac{5}{23} & -\frac{3}{23} & 0 & 0 \\ -\frac{41}{23} & \frac{20}{23} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{23} & -\frac{12}{23} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{23}, \frac{4}{23}, 0, 0\right)$$

Можно найти цену игры как:

$$\widetilde{v} = \frac{1}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4} = \frac{23}{5}$$

Но это не будет действительной ценой игры.

> Вспомним, что до составления симплекс-матрицы мы прибавили к каждому элементу начальной матрицы число 5. Теперь для получения настоящей цены игры его надо отнять от $\widetilde{v}$.

Таким образом получим:

$$v = \widetilde{v} - 5 = \frac{23}{5} - 5 = \frac{23}{5} - \frac{25}{5} = -\frac{2}{5}$$

Цена игры: $v = -\frac{2}{5}$

> Но мы пока не забыли число $\widetilde{v}$. На основании него еще предстоить определить оптимальные стратегии игроков.

$$\begin{aligned} \frac{p_{\alpha_1,\delta_1}}{\widetilde{v}} &= \frac{1}{23} \\ \frac{p_{\alpha_1,\delta_2}}{\widetilde{v}} &= \frac{4}{23} \\ \frac{p_{\alpha_2,\delta_1}}{\widetilde{v}} &= 0 \\ \frac{p_{\alpha_2,\delta_2}}{\widetilde{v}} &= 0 \end{aligned}$$

Тогда получим:

$$\begin{aligned} p_{\alpha_1,\delta_1} &= \frac{1}{5} \\ p_{\alpha_1,\delta_2} &= \frac{4}{5} \\ p_{\alpha_2,\delta_1} &= 0 \\ p_{\alpha_2,\delta_2} &= 0 \end{aligned}$$

И аналогично:

$$\begin{aligned} q_{\beta_1,\gamma_1} &= \tfrac{3}{5} \\ q_{\beta_1,\gamma_2} &= 0 \\ q_{\beta_2,\gamma_1} &= 0 \\ q_{\beta_2,\gamma_2} &= \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

Ну и в заключение:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}; \quad v = -\frac{2}{5}$$

3. Непрерывные игры

3.1. Задача

Пусть есть некоторая непрерывная[2] игра:

$$F(x,y) = \frac{(1+Nx)(1+2y)}{(1+2xy)^2}; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad 0 \leqslant y \leqslant a;$$

и

- Оптимальное решение первого игрока

$$f_1^*(x) = \frac{1}{c(1+Nx)\ln 2}$$

- Оптимальное решение второго игрока

$$f_2^*(x) = \frac{2}{b(1+2y)\ln 2}$$

N — порядковый номер в группе (пусть будет 25).
Найти a, b, c.

3.2. Конкретизация задачи

$$F(x,y) = \frac{(1+25x)(1+2y)}{(1+2xy)^2}; \quad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad 0 \leqslant y \leqslant a;$$

и

- Оптимальное решение первого игрока

$$f_1^*(x) = \frac{1}{c(1+25x)\ln 2}$$

- Оптимальное решение второго игрока

$$f_2^*(x) = \frac{2}{b(1+2y)\ln 2}$$

[2] В противовес дискретным.

3.3. Условия нормировки

3.3.1. Для оптимального решения первого игрока

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(x)dx = 1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1^*(x)dx = \int\limits_{0}^{1} f_1^*(x)dx = \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{c(1+25x)\ln 2} = 1$$

Из этого не трудно установить, что:

$$c = \frac{\ln(25+1)}{25\ln 2} = \frac{1}{25}\log_2(26)$$

3.3.2. Для оптимального решения второго игрока

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(y)dy = 1$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_2^*(y)dy = \int\limits_{0}^{a} f_2^*(y)dy = \int\limits_{0}^{a} \frac{2}{b(1+2y)\ln 2}dy$$

Из этого получим:

$$\ln(2a+1) = b\ln 2$$

$$b = \frac{\ln(1+2a)}{\ln 2} = \log_2(1+2a)$$

3.4. Оптимальность

$$\int\limits_{d}^{c} F(t,y)f_2^*(y)dy \leqslant v \leqslant \int\limits_{a}^{b} F(x,s)f_1^*(x)dx$$

Посчитаем первый и второй интегралы.

3.4.1. Посчитаем первый интеграл.

$$\int_a^b \frac{(1+25t)(1+2y)}{(1+2ty)^2}\frac{2}{b(1+2y)\ln 2}dy = \frac{2(1+25t)}{2tb\ln 2}\cdot\int_a^b \frac{d(1+2ty)}{(1+2ty)^2} =$$

$$= -\frac{2(1+25t)}{2tb\ln 2}\cdot\left(\frac{1}{(1+2ta)}-\frac{1}{(1+2t0)}\right) = \frac{2(1+25t)}{2tb\ln 2}\cdot\frac{2ta}{(1+2ta)} =$$

$$= \frac{2(1+25t)}{\ln(2a+1)}\cdot\frac{a}{(1+2ta)}$$

3.4.2. Посчитаем второй интеграл.

$$\int_a^b \frac{(1+25x)(1+2s)}{(1+2ts)^2}\frac{1}{c(1+25x)\ln 2}dx = -\frac{1+2s}{2s\cdot(c\ln 2)}\cdot\left(\frac{1}{1+2s}-1\right)$$

Далее не трудно получить, что

$$\int_a^b \frac{(1+25x)(1+2s)}{(1+2ts)^2}\frac{1}{c(1+25x)\ln 2}dx = \frac{1}{\ln 2} = \frac{25}{\ln 26}$$

3.4.3. Неравенство

$$\int_d^c F(t,y)f_2^*(y)dy \leqslant v \leqslant \int_a^b F(x,s)f_1^*(x)dx$$

$$\frac{2(1+25t)}{\ln(2a+1)}\cdot\frac{a}{(1+2ta)} \leqslant v \leqslant \frac{25}{\ln 26}$$

$$\frac{2(1+25t)}{\ln(2a+1)}\cdot\frac{a}{(1+2ta)} \leqslant \frac{25}{\ln 26}$$

- Пусть $t = 0$, тогда

$$\frac{2a}{\ln(2a+1)} \leqslant \frac{25}{\ln 26}$$

$\frac{2a}{\ln(2a+1)}$ — возрастающая. Из этого следует, что $a \leqslant \frac{25}{2}$. Если $a = \frac{25}{2}$ равенство становится строгим.

- Пусть $t = 1$, тогда

$$\frac{2(1+25)}{\ln(2a+1)} \cdot \frac{a}{(1+2a)} \leqslant \frac{25}{\ln 26}$$

$\frac{2(1+25)}{\ln(2a+1)} \cdot \frac{a}{(1+2a)}$ — убывающая. Это не сложно определить если вычислить производную функции (она меньше 0). Если $a = \frac{25}{2}$ равенство становится строгим. Значит $a \geqslant \frac{25}{2}$.

Не сложно заметить:

$$a \leqslant \frac{25}{2}; \quad a \geqslant \frac{25}{2} \Rightarrow a = \frac{25}{2}$$

$$a = \frac{25}{2}$$

$$b = \frac{\ln(26)}{\ln 2} = \log_2(26)$$

$$c = \frac{\ln(26)}{25 \ln 2} = \frac{1}{25} \log_2(26)$$

4. Внутрикоалиционная задача (НЛП)

4.1. Задача

На основе задания № 2 составить и решить внутрикоалиционная игру.

4.2. Составление

Ввиду простоты чисел во втором задании, мы не будем составлять внутрикоалиционную игру на ее основе, а составим новую. Пусть это будут игроки 5 и 6 против 7. Рассмотрим коалиционную игру.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3. Упрощение

Если убрать заведомо невыгодные стратегии, игра упростится до вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем смешанные стратегии игроков:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

4.4. Задача нелинейного программирования

Пара (P^*, Q^*) — оптимальна по Нешу, тогда и только тогда, когда $\exists \mu, \nu$:

$$(P^*, Q^*) = \arg \max_{(P,Q)\in Z} (PAQ - PBQ - \mu - \nu)$$

$$Z = \{(P, Q) : P \geqslant 0, Q \geqslant 0, (P, f) = 1, (Q, g) = 1; AQ \leqslant \mu f, PB \leqslant \nu g\}$$

В соответствии с этим сопоставим задачу оптимизации.

$$\begin{cases} PAQ + PBQ - \mu - \nu \to \max \\ \sum\limits_{i=1}^{2} p_i = 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{2} q_i = 1 \\ P \geqslant 1 \\ Q \geqslant 1 \\ AQ \leqslant \mu f \\ PB \leqslant \nu g \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p_1, p_2) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \mu - \nu \to \max \\ p_1 + p_2 = 1 \\ q_1 + q_2 = 1 \\ p_i \geqslant 1, i = 1, 2 \\ q_i \geqslant 1, i = 1, 2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \leqslant \mu f \\ (p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \leqslant \nu g \end{cases}$$

$$\begin{cases} (p_1+3p_2, 5p_1+2p_2)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (-2p_1, -2p_2)\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \mu - \nu \to \max \\ p_2 = 1 - p_1 \\ q_2 = 1 - q_1 \\ p_i \geqslant 1, i = 1,2 \\ q_i \geqslant 1, i = 1,2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \leqslant \mu f \\ (p_1, p_2)\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \leqslant \nu g \end{cases}$$

Далее упрощая систему получим:

$$\begin{cases} \frac{3}{5} - \nu \to \max \\ p_1 \geqslant 0 \\ p_1 \geqslant \frac{-\nu}{2} \\ p_1 \leqslant \frac{\nu+2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 & = & \frac{1}{2} \\ \nu & = & -1 \end{cases} \Rightarrow \quad p_2 = \frac{1}{2}$$

Таким образом для системы с вычеркнутыми стратегиями:

$$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Для начальной системы:

$$P = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

5. Многокритериальная оптимизация

5.1. Задача

Дано уравнение.

$$r = Ne^{2\varphi i}; \quad N = 25$$

Построить график действительной и мнимой части функции в полярной системе координат. Эти графики будут выступать в роли критериев. Задать их в критериальном пространстве. Найти решение оптимальное по Парето, по Слейтеру и по Джоффриону для задачи минимизации.

5.2. Графики

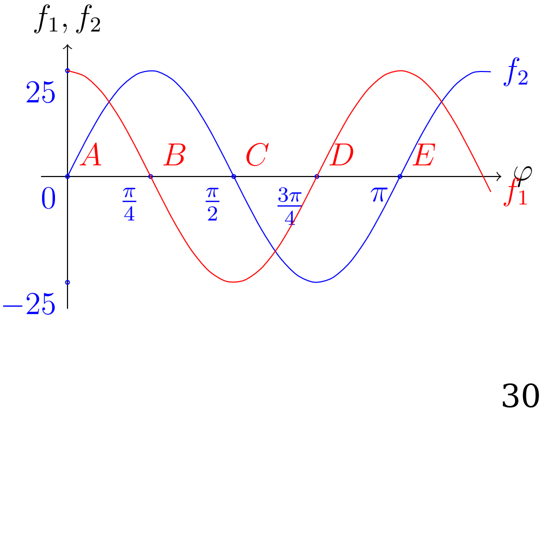
$$r = Ne^{2\varphi i} = N(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi);$$

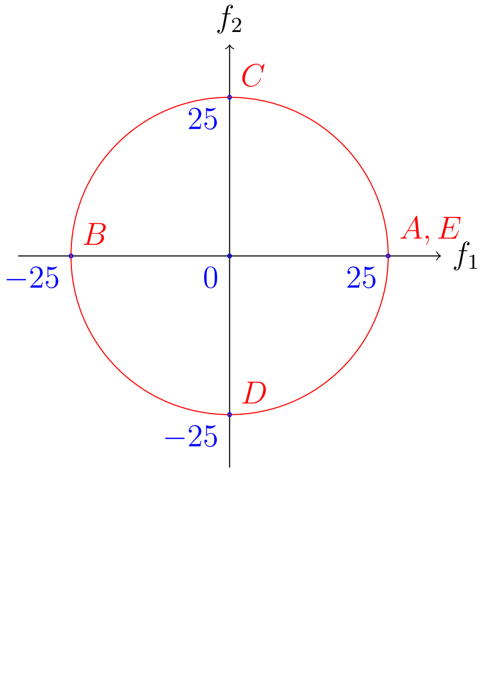
или

$$r = 25 \cos 2\varphi + 25i \sin 2\varphi;$$

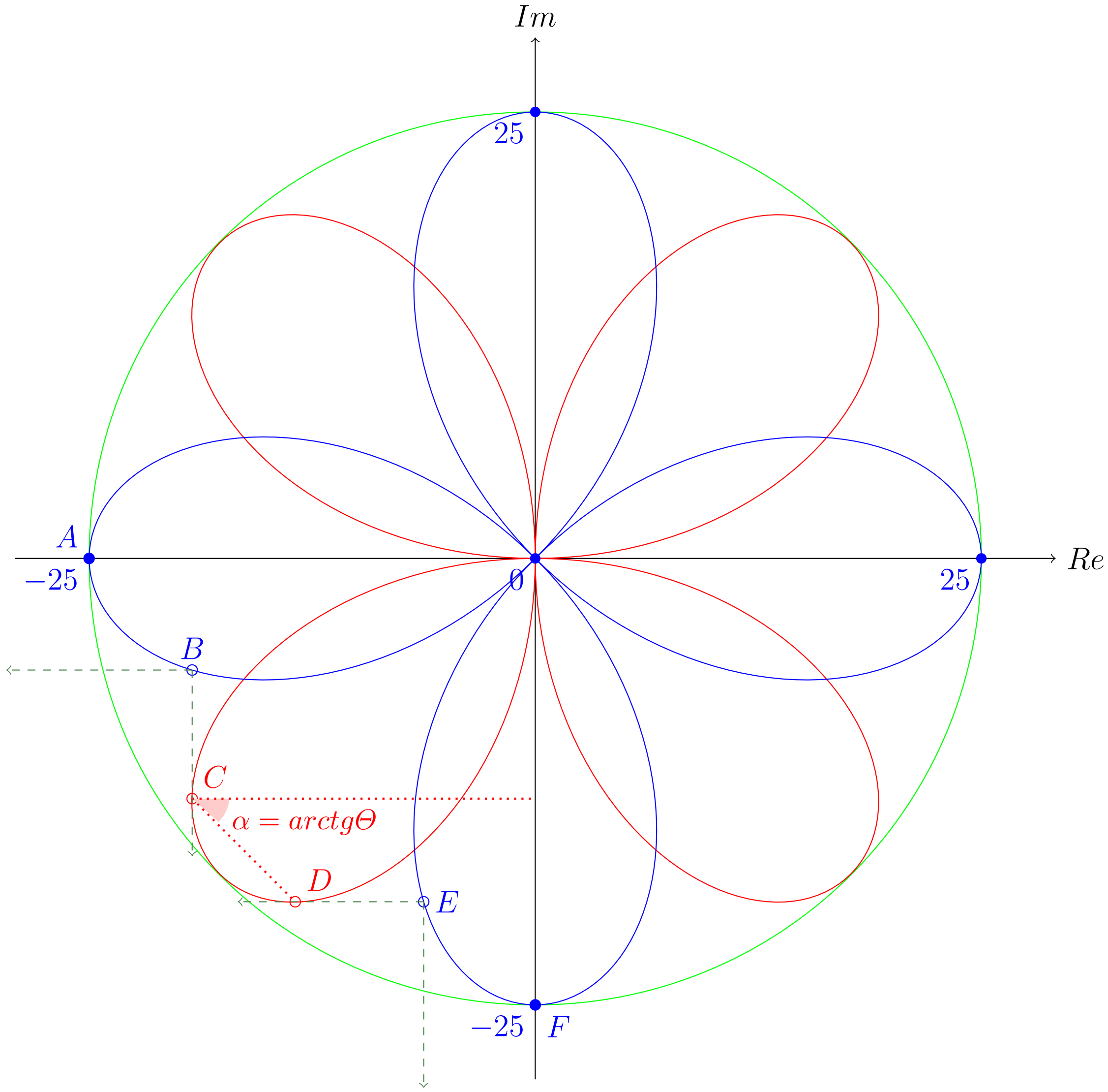
- $f_1 = 25 \cos 2\varphi$;
- $f_2 = 25 \sin 2\varphi$;

5.2.1. В декартовой системе





5.2.2. В полярной системе



5.3. Парето

$$P = [180 + 360 \cdot k, 198 + 360 \cdot k) \cup$$
$$\cup [215 + 360 \cdot k, 235 + 360 \cdot k] \cup$$
$$\cup (252 + 360 \cdot k, 270 + 360 \cdot k], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Значения даны в градусах.

$$Э^P = [A, B) \cup [C, D] \cup (E, F]$$

5.4. Слейтер

$$S = [180 + 360 \cdot k, 198 + 360 \cdot k] \cup$$
$$\cup [215 + 360 \cdot k, 235 + 360 \cdot k] \cup$$
$$\cup [252 + 360 \cdot k, 270 + 360 \cdot k], \quad k \in \mathbb{Z}$$

Значения даны в градусах.

$$Э^S = [A, B] \cup [C, D] \cup [E, F]$$

5.5. Джоффрион

y^0 — эффективная по Джоффриону, если

$$\forall y, \quad y^0_{re} < y_{re}, \quad y^0_{im} > y_{im}$$

$$\exists \varTheta > 0, \quad \frac{y^0_{re} - y_{re}}{y_{im} - y^0_{im}} \leqslant \varTheta$$

Причем

$$\varTheta = tg\alpha$$

Тогда по заданию:

$$G = (180 + 360 \cdot k, 198 + 360 \cdot k) \cup$$
$$\cup (215 + 360 \cdot k, 235 + 360 \cdot k) \cup$$
$$\cup (252 + 360 \cdot k, 270 + 360 \cdot k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

Значения даны в градусах.

$$Э^G = (A, B) \cup (C, D) \cup (E, F)$$

6. Метод уступок

6.1. Задача

$$f_1 = \sin x$$
$$f_2 = \cos\frac{x}{N+2}$$
$$x \in [0, 2\cdot N\cdot \pi]$$

Нужно будет, используя метод уступок, задавая первую уступку:

$$\Delta_1 = \frac{1}{3}\left|f_1(x^{10})\right|$$

Нужно найти оптимальное по Парето решение x^{20} и соотнести метод уступок с методом экономического свертывания. Найти соответствующие коэффициенты веса:

$$\Phi(x) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$$

λ_i — коэффициенты веса, соответствующие оптимальному по Поретто решению.

То есть связь решений двух методов. Можно считать, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, то есть соотнести бесконечность и отрезок от 0 до 1.

6.2. Конкретизация задачи

$$N = 25 \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcc} f_1 & = & \sin x \\ f_2 & = & \cos\dfrac{x}{25+2} \\ & & x\in[0, 2\pi 25] \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{lcc} f_1 & = & \sin x \\ f_2 & = & \cos\dfrac{x}{27} \\ & & x\in[0, 50\pi] \end{array}\right.$$

6.3. Первый критерий

$$f_1 \to \min_{x\in[0,50\cdot\pi]}$$

$$x^{10} = \left\{\frac{3\cdot\pi}{2} + 2\pi k; k = \overline{0,25}\right\}$$

$$f_1(x^{10}) = -1$$

Опишем параметр метода уступок:

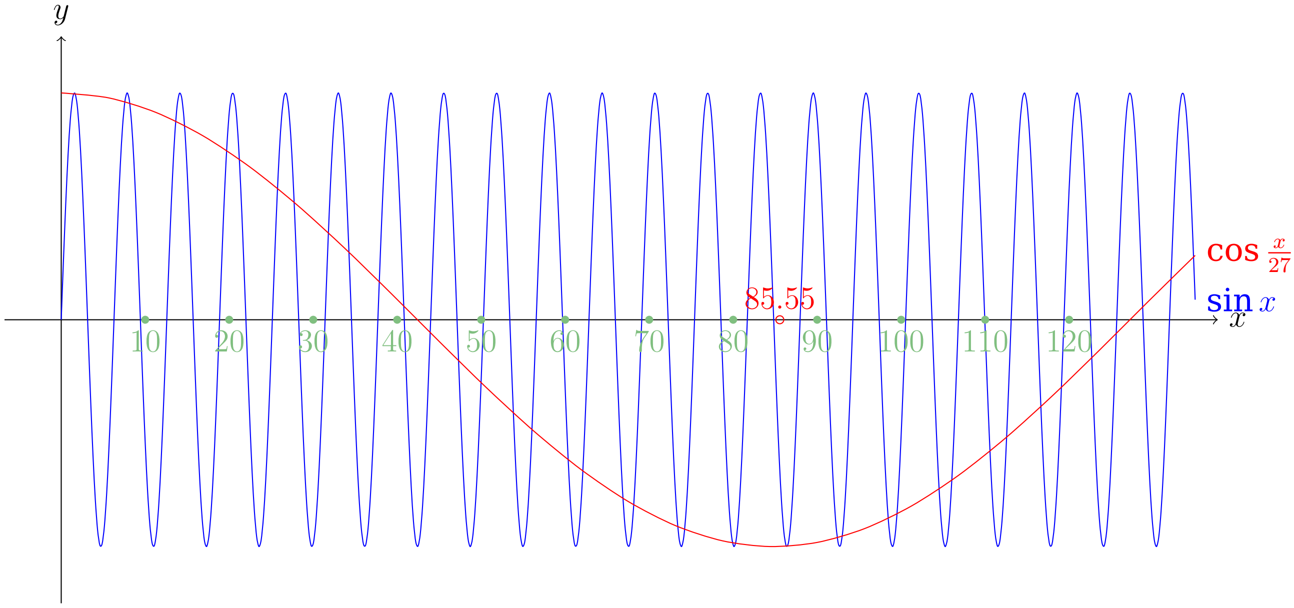
$$\Delta_1 = \frac{1}{3}\cdot|f_1(x^{10})| = \frac{1}{3}\cdot|-1| = \frac{1}{3}$$

6.4. Второй критерий

$$f_2 \to \min_{x\in M}$$

$$M = [0,50\cdot\pi] \cap \{x; f_1(x) \leqslant f_1(x^{10}) + \Delta_1\} = [0,50\cdot\pi] \cap \left\{x; f_1(x) \leqslant \frac{-2}{3}\right\}$$

$$x^{20} = \left\{27\cdot\pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)\right\} = 85.5527293032$$



Точка оптимально по Парето $x^{20} \in P$ в силу определения:

$$\nexists x_i : \quad \begin{cases} f_1(x) & < & f_1(x^{20}) \\ f_2(x) & \leqslant & f_2(x^{20}) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f_1(x) & \leqslant & f_1(x^{20}) \\ f_2(x) & < & f_2(x^{20}) \end{cases}$$

6.5. Метод экономического свертывания

Соотнесем с методом экономической свертки. Найдем: $\lambda_1, \lambda_2 : \lambda_1 = 1 - \lambda_2$.

$$\Phi(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

$$x^{20} = \arg \min_{x \in [0, 50\pi]} \Phi(x) = \arg \min_{x \in [0, 50\pi]} \Phi(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))$$

$$\lambda_1 f_1'(x^{20}) + \lambda_2 f_2('x^{20}) = 0$$

$$\lambda_1 \left(\cos x^{20}\right) + (1 - \lambda_1)\left(-\frac{1}{18} \cdot \sin \frac{x^{20}}{18}\right) = 0$$

$$\lambda_1 \left(\cos x^{20} + \frac{1}{18} \cdot \sin \frac{x^{20}}{18}\right) = \frac{1}{18} \cdot \sin \frac{x^{20}}{18}$$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{1}{18} \cdot \sin \frac{x^{20}}{18}}{\cos x^{20} + \frac{1}{18} \cdot \sin \frac{x^{20}}{18}}$$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{1}{18} \cdot \sin \frac{27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)}{18}}{\cos\left(27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)\right) + \frac{1}{18} \cdot \sin \frac{27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)}{18}}$$

Таким образом

$$\begin{cases} \lambda_1 & = & \frac{\frac{1}{18} \cdot \sin \frac{27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)}{18}}{\cos\left(27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)\right) + \frac{1}{18} \cdot \sin \frac{27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)}{18}} \\ \lambda_2 & = & 1 - \frac{\frac{1}{18} \cdot \sin \frac{27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)}{18}}{\cos\left(27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)\right) + \frac{1}{18} \cdot \sin \frac{27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)}{18}} \end{cases}$$

x^{20}, найденное методом уступок, соотносится с решением, найденным методом экономического свертывания, если соответствующее λ выглядит как в системе выше.