

**Московский авиационный институт
(государственный Технический
университет)**

Факультет прикладной математики

РГР по курсу «Теория игр»

Преподаватель: Т. И. Короткова
Студенты: И. К. Никитин

Москва, 2010

Содержание

1	Модель экспорта рыбы	2
1.1	Задача	2
1.2	Конкретизация задачи	2
1.3	Общая Модель	3
1.4	Случайные факторы	4
1.5	Непредсказуемые факторы	4
1.5.1	Зависимость факторов друг от друга	4
1.6	Итоговая оценка	4
2	Коалиционные игры	5
2.1	Задача	5
2.2	Игры 1 х 3	6
2.2.1	I против II, III, IV	6
2.2.2	II против I, III, IV	7
2.2.3	III против I, II, IV	9
2.2.4	IV против I, II, III	12
2.3	Игры 2 х 2	14
2.3.1	I, II против III, IV	14
2.3.2	I, III против II, IV	15
2.3.3	I, IV против II, III	16
3	Непрерывные игры	22
3.1	Задача	22
3.2	Конкретизация задачи	22
3.3	Условия нормировки	23
3.3.1	Для оптимального решения первого игрока	23
3.3.2	Для оптимального решения второго игрока	23
3.4	Оптимальность	23
3.4.1	Посчитаем первый интеграл.	24
3.4.2	Посчитаем второй интеграл.	24
3.4.3	Неравенство	24

4	Внутрикоалиционная задача (НЛП)	26
4.1	Задача	26
4.2	Составление	26
4.3	Упрощение	26
4.4	НЛП	27
5	МКО	29
5.1	Задача	29
5.2	Графики	29
5.2.1	В декартовой системе	29
5.2.2	В полярной системе	30
5.3	Парето	30
5.4	Слейтер	31
5.5	Джоффрион	31
6	Метод уступок	32
6.1	Задача	32
6.2	Конкретизация задачи	32
6.3	Первый критерий	33
6.4	Второй критерий	33
6.5	Метод экономического свертывания	34

1. Модель экспорта рыбы

1.1. Задача

Необходимо составить математическую модель для экспорта товара, (производства, продажи услуг ...). Цель — максимизация прибыли.

1.2. Конкретизация задачи

Пусть мы и некий обобщенный конкурент производим экспортную продукцию. Для определенности будем рассматривать рыболовную промышленность.

Пусть n — количество видов продаваемой рыбы, набор разновидностей у нас и конкурента одинаковый (либо они взаимозаменяемы, но нет сектора, в котором у кого-либо из участников была бы монополия [мы это не рассматриваем]), у каждого (i -го) вида товаров есть параметры:

	произведено	цена
Мы	x_i	p_i
Конкурент	y_i	r_i

Ограничения:

- C — количество денег на рынке (сколько могут потратить покупатели).
- $k_i, \quad i = \overline{1, n}$ — ограничение спроса на продукцию (т.е. будет куплено не более этого количества).
- 3 — затраты

Задача: $\Pi \rightarrow \max, \Pi$ — продажи.

Дополнительные обозначения:

- \tilde{y}_i — количество товаров i -го вида, произведенное конкурентом, имеющее преимущество над нашим товаром того же вида.
- \tilde{k}_i — «чистый» спрос на нашу продукцию (с учетом преимуществ конкурента).

- \tilde{x}_i — сколько мы сможем продать.
- \tilde{C}_i — выручка конкурента.
- \bar{C}_i — наша выручка.

Нам нужно посчитать разные оценки эффективности стратегий для этой модели.

1.3. Общая Модель

Определим $F(X, Y)$.

$$F(X, Y) \rightarrow \max_X$$

- F — цель;
- X — стратегии (инновации, нововведения, методы эксплуатации);
- Y — неконтролируемые факторы

В данном случае:

$$X = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$$

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$$

- Y^1 — неопределенные факторы с известной областью изменения:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} y_i \\ r_i \end{pmatrix};$$

- Y_2 — случайные факторы с известным законом распределения;
- Y_3 — непредсказуемые факторы (законы природы, Force majeure).

Пусть $\inf_Y F(x_i, p_i, y_i, r_i) = \Pi$ — прибыль, без учета случайных и неконтролируемых факторов.

1.4. Случайные факторы

Южное колебание El Niño — это глобальное океано-атмосферное явление, представляют собой температурные флуктуации поверхностных вод в тропиках восточной части Тихого океана. Вдоль восточного побережья Южной Америки El Niño уменьшает апвеллинг (поднятие с глубин) холодной, богатой планктоном воды, которая поддерживает большие популяции рыбы. Локальная рыбопромысловая индустрия вдоль береговой линии может испытывать недостаток рыбы во время продолжительных событий El Niño.

Пусть вероятность происхождения события El Niño 7%. Когда произошло событие El Niño, будем считать, что рыбы нет. И мы ничего не производим $\Phi_1(X) = \inf_{Y \in N} F(X, Y) = 0$. Тогда:

$$\Phi_3(X) = \int \dots \int \inf_{Y^1} F(X, Y) d \dots df(Y^{2i}) = 0 + \frac{93}{100} \Pi$$

1.5. Непредсказуемые факторы

Будем считать **шторм** непредсказуемые фактором (допустим, предупредить шторм мы не научились). Во время шторма, мы теряем половину рыболовецких кораблей (моряки спасаются). Тогда:

$$\Phi_4(X) = \inf_{Y^1 \in N} \inf_{\alpha \in N^\alpha} F(X, Y^1, \alpha) = \frac{1}{2} \Pi$$

К неконтролируемым факторам можно так же отнести нападения морских пиратов. Здесь мы это рассматривать не будем.

1.5.1. Зависимость факторов друг от друга

Случайные и непредсказуемые факторы могут зависеть друг от друга. Допустим, шторм происходит после события El Niño. Но при этом, фактор шторма выводится из класса непредсказуемые факторов и становится случайным.

1.6. Итоговая оценка

$$\Phi(X) = \frac{1}{2} \int \dots \int \inf_{Y^1} F(X, Y^1, Y^2) df(Y^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{93}{100} \Pi$$

2. Коалиционные игры

2.1. Задача

Составим платежную матрицу(мы ее придумали):

				<i>I</i>	<i>II</i>	<i>III</i>	<i>IV</i>
α_1	β_1	γ_1	δ_1	-2	1	1	0
α_1	β_1	γ_1	δ_2	1	1	-1	-1
α_1	β_1	γ_2	δ_1	1	0	-2	1
α_1	β_1	γ_2	δ_2	0	-2	1	1
α_1	β_2	γ_1	δ_1	0	1	1	-2
α_1	β_2	γ_1	δ_2	1	1	-2	0
α_1	β_2	γ_2	δ_1	1	-2	0	1
α_1	β_2	γ_2	δ_2	-2	0	1	1
α_2	β_1	γ_1	δ_1	-4	2	2	0
α_2	β_1	γ_1	δ_2	2	2	0	-4
α_2	β_1	γ_2	δ_1	2	0	-4	2
α_2	β_1	γ_2	δ_2	0	-4	2	2
α_2	β_2	γ_1	δ_1	0	2	2	-4
α_2	β_2	γ_1	δ_2	2	2	-2	-2
α_2	β_2	γ_2	δ_1	2	-4	0	2
α_2	β_2	γ_2	δ_2	-4	0	2	2

Нужно найти решение различных коалиционных игр. Для каждой коалиционной игры решение желательно искать разными способами.

Важно отметить, что не все приведенные игры решены корректно. Перед решением любой матричной игры необходимо упростить матрицы, убрать из них заведомо не эффективные стратегии. Мы этого не делаем. В данном случае, мы выбрали слишком «простую» платежную матрицу. И решая все «правильно» мы не смогли бы показать методы.

2.2. Игры 1×3 **2.2.1. I против II, III, IV**

	$\beta_1, \gamma_1, \delta_1$	$\beta_1, \gamma_1, \delta_2$	$\beta_1, \gamma_2, \delta_1$	$\beta_1, \gamma_2, \delta_2$	$\beta_2, \gamma_1, \delta_1$	$\beta_2, \gamma_1, \delta_2$	$\beta_2, \gamma_2, \delta_1$	$\beta_2, \gamma_2, \delta_2$
α_1	-2	1	1	0	0	1	1	-2
α_2	-4	2	2	0	0	2	2	-4

Найдем максимин и минимакс.

Нижняя цена игры (максимин):

$$\begin{aligned}
 \alpha = v_{11} &= \max_{\alpha_1, \alpha_2} \min_{\beta_i, \gamma_j, \delta_k} \\
 &= \max_{\alpha_1, \alpha_2} \{ \min_{\beta_i, \gamma_j, \delta_k} \{-2, 1, 1, 0, 0, 1, 1, -2\}, \min_{\beta_i, \gamma_j, \delta_k} \{-4, 2, 2, 0, 0, 2, 2, -4\} \} \\
 &= \max_{\alpha_1, \alpha_2} \{-4, -2\} = -2
 \end{aligned}$$

Верхняя цена игры (минимакс):

$$\beta = v_{12} = \min_{\beta_i, \gamma_j, \delta_k} \max_{\alpha_1, \alpha_2} = \min_{\beta_i, \gamma_j, \delta_k} \{ \max_{\alpha_1, \alpha_2} \{-2, -4\}, \max_{\alpha_1, \alpha_2} \{1, 2\}, \max_{\alpha_1, \alpha_2} \{0, 0\}, \} = -2$$

Легко заметить:

$$\alpha = \beta$$

Игра имеет решение в чистых стратегиях, т.к. верхняя и нижняя цена игры совпадают.

Для первого игрока оптимальна стратегий α_1 . Для остальных в раной степени применимы:

- $\beta_1, \gamma_1, \delta_1$
- $\beta_2, \gamma_2, \delta_2$

2.2.2. II против I, III, IV

	$\alpha_1, \gamma_1, \delta_1$	$\alpha_1, \gamma_1, \delta_2$	$\alpha_1, \gamma_2, \delta_1$	$\alpha_1, \gamma_2, \delta_2$	$\alpha_2, \gamma_1, \delta_1$	$\alpha_2, \gamma_1, \delta_2$	$\alpha_2, \gamma_2, \delta_1$	$\alpha_2, \gamma_2, \delta_2$
β_1	1	1	0	-2	2	2	0	-4
β_2	1	1	-2	0	2	2	-4	0

Найдем максимин и минимакс. Нижняя цена игры (максимин):

$$v_{21} = \max_{\beta_1, \beta_2} \min_{\alpha_i, \gamma_j, \delta_k} = -4$$

Верхняя цена игры (минимакс):

$$v_{22} = \min_{\alpha_i, \gamma_j, \delta_k} \max_{\beta_1, \beta_2} = 0$$

К сожалению, оказалось, что

$$v_{21} \neq v_{22}$$

Игра не имеет решения в чистых стратегиях. Придется искать решение в смешанных стратегиях. Упростим коалиционную матрицу. Вычеркнем заведомо худшие для коалиции (α, γ, δ) . В итоге получим матрицу:

	$\alpha_2, \gamma_2, \delta_1$	$\alpha_2, \gamma_2, \delta_2$
β_1	0	-4
β_2	-4	0

Если

- p_1^* — вероятность применения первой стратегии
- p_2^* — вероятность применения второй стратегии

то, можно найти вероятности применения стратегий по формулам:

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v \leftarrow \text{при стратегии } \beta_1$$

$$a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v \leftarrow \text{при стратегии } \beta_2$$

Принимая во внимание, что $p_1^* + p_2^* = 1$, в итоге получим:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0 - (-4)}{0 + 0 - (-4) - (-4)} = \frac{1}{2}$$

$$p_2^* = \frac{1}{2}$$

(Задача 2)

2 Коалиционные игры

Таким образом оптимальная стратегия игрока β :

$$S_{\beta}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

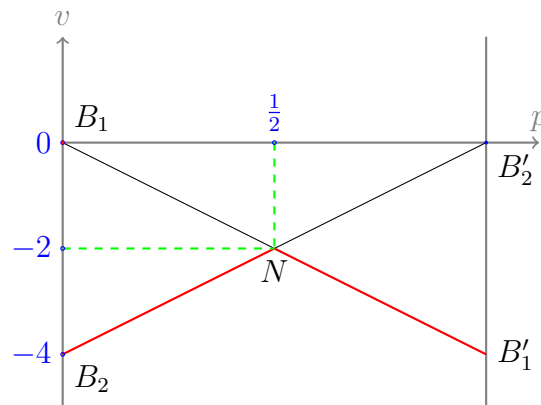
Оптимальная стратегия для коалиции ищется аналогично:

$$S_{(\alpha, \gamma, \delta)}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

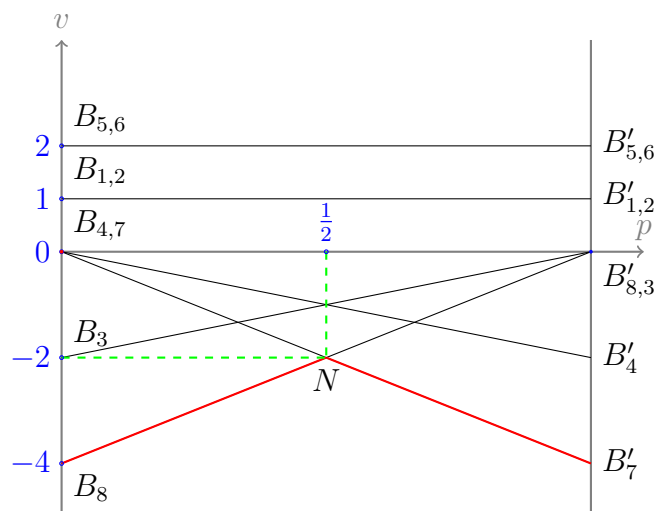
Найдем цену игры:

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0 - 16}{8} = -2$$

Найдем тоже самое решение графически



Решение можно было искать не упрощая матрицу. Только это несколько не рационально. Мы все равно получим правильный ответ.



2.2.3. III против I, II, IV

	$\alpha_1, \beta_1, \delta_1$	$\alpha_1, \beta_1, \delta_2$	$\alpha_1, \beta_2, \delta_1$	$\alpha_1, \beta_2, \delta_2$	$\alpha_2, \beta_1, \delta_1$	$\alpha_2, \beta_1, \delta_2$	$\alpha_2, \beta_2, \delta_1$	$\alpha_2, \beta_2, \delta_2$
γ_1	1	-1	1	-2	2	0	2	-2
γ_2	-2	1	0	1	-4	2	0	2

Найдем максимин и минимакс. Нижняя цена игры (максимин):

$$v_{31} = \max_{\gamma_1, \gamma_2} \min_{\alpha_i, \beta_j, \delta_k} = -2$$

Верхняя цена игры (минимакс):

$$v_{32} = \min_{\alpha_i, \beta_j, \delta_k} \max_{\gamma_1, \gamma_2} = 1$$

К сожалению, оказалось, что

$$v_{31} \neq v_{32}$$

Игра не имеет решения в чистых стратегиях. Придется искать решение в смешанных стратегиях.

Зададим вероятностные вектора для третьего игрока и для его противников:

- Для третьего игрока

$$P = (p_{\gamma_1}, p_{\gamma_2})$$

- Для коалиции

$$Q = (q_{\alpha_1, \beta_1, \delta_1}, q_{\alpha_1, \beta_1, \delta_2}, q_{\alpha_1, \beta_2, \delta_1}, q_{\alpha_1, \beta_2, \delta_2}, q_{\alpha_2, \beta_1, \delta_1}, q_{\alpha_2, \beta_1, \delta_2}, q_{\alpha_2, \beta_2, \delta_1}, q_{\alpha_2, \beta_2, \delta_2})$$

Будем решать игру методом Брауна. Метод Брауна — итерационный. Для того, чтобы он когда-нибудь остановился, нужно задать условия окончания. Мы явно ограничим число итераций. Пусть будет 9 итераций.

Вообще говоря, задачу подобного класса не стоит решать методом Брауна. Более того, перед вообще каким либо решением задачу следует упростить. И матрица игры сведется к матрице 2×2 . Но в данном случае, мы хотели проиллюстрировать сам метод Брауна. Отчасти, мы используем этот метод здесь из любопытства. Не известно какой результат мы получим.

Сделаем все элементы матрицы положительными. Для это прибавим к каждому элементу матрицы число 5.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & -4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 & 3 & 7 & 5 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 6 & 1 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix};$$

(Задача 2)

2 Коалиционные игры

k	i	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	j	A_1	A_2	\underline{v}	\bar{v}	v
1	2	6	4	6	<u>3</u>	7	5	7	3	4	3	$\bar{6}$	3.0000	6.0000	4.5000
2	1	9	10	11	9	<u>8</u>	12	12	10	5	$\overline{10}$	7	4.0000	5.0000	4.5000
3	1	15	14	17	<u>12</u>	15	17	19	13	4	$\overline{13}$	13	4.0000	4.3333	4.1667
4	2	21	18	23	<u>15</u>	22	22	26	16	4	16	$\overline{19}$	3.7500	4.7500	4.2500
5	2	24	24	28	<u>21</u>	23	29	31	23	4	19	$\overline{25}$	4.2000	5.0000	4.6000
6	1	27	30	33	27	<u>24</u>	36	36	30	5	$\overline{26}$	26	4.0000	4.3333	4.1667
7	2	33	34	39	<u>30</u>	31	41	43	33	4	29	$\overline{32}$	4.2857	4.5714	4.4286
8	1	36	40	44	36	<u>32</u>	48	48	40	5	$\overline{36}$	33	4.0000	4.5000	4.2500
9	1	42	44	50	<u>39</u>	39	53	55	43	4	$\overline{39}$	39	4.3333	4.3333	4.3333

Это решение было получено численно. Легко, догадаться:

$$4.3333 = 4\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$$

Это означает, что предварительная цена игры $\tilde{v} = \frac{13}{3}$. Но это не будет действительной ценой игры.

Вспомним, что до составления применения метода мы прибавили к каждому элементу начальной матрицы число 5. Теперь для получения настоящей цены игры его надо отнять от \tilde{v} .

Таким образом получим:

$$v = \tilde{v} - 5 = \frac{13}{3} - 5 = \frac{13}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{2}{3}$$

Вероятностные вектора для третьего игрока и для его противников будут:

- Для третьего игрока

$$P = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9} \right)$$

- Для коалиции

$$Q = \left(0, 0, 0, \frac{6}{9}, \frac{3}{9}, 0, 0, 0, \right)$$

Вообще говоря, результат выглядит странно, но он соответствует ожиданиям. Повторимся, задачи подобного класса не стоит решать методом Брауна.

Запишем итоговый результат:

$$P = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9} \right)$$

$$Q = \left(0, 0, 0, \frac{6}{9}, \frac{3}{9}, 0, 0, 0, \right)$$

$$v = -\frac{2}{3}$$

2.2.4. IV против I, II, III

	$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$	$\alpha_1, \beta_1, \gamma_2$	$\alpha_1, \beta_2, \gamma_1$	$\alpha_1, \beta_2, \gamma_2$	$\alpha_2, \beta_1, \gamma_1$	$\alpha_2, \beta_1, \gamma_2$	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_1$	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$
δ_1	0	1	-2	1	0	2	-4	2
δ_2	-1	1	0	1	-4	2	0	2

Найдем максимин и минимакс.

$$v_{41} = \max_{\delta_1, \delta_2} \min_{\alpha_i, \beta_j, \gamma_k} = -4$$

$$v_{42} = \min_{\alpha_i, \beta_j, \gamma_k} \max_{\delta_1, \delta_2} = -2$$

К сожалению, оказалось, что

$$v_{31} \neq v_{32}$$

Игра не имеет решения в чистых стратегиях. Придется искать решение в смешанных стратегиях. Упростим коалиционную матрицу. Вычеркнем заведомо худшие для коалиции (α, β, γ) . В итоге получим матрицу:

	$\alpha_2, \beta_1, \gamma_1$	$\alpha_2, \beta_2, \gamma_1$
δ_1	0	-4
δ_2	-4	0

Если

- p_1^* — вероятность применения первой стратегии
- p_2^* — вероятность применения второй стратегии

то, можно найти вероятности применения стратегий по формулам:

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v \leftarrow \text{при стратегии } \delta_1$$

$$a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v \leftarrow \text{при стратегии } \delta_2$$

Принимая во внимание, что $p_1^* + p_2^* = 1$, в итоге получим:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0 - (-4)}{0 + 0 - (-4) - (-4)} = \frac{1}{2}$$

(Задача 2)

2 Коалиционные игры

$$p_2^* = \frac{1}{2}$$

Таким образом оптимальная стратегия игрока β :

$$S_\delta^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Оптимальная стратегия для коалиции ищется аналогично:

$$S_{(\alpha, \beta, \gamma)}^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Найдем цену игры:

$$v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{0 - 16}{8} = -2$$

2.3. Игры 2×2 **2.3.1. I, II против III, IV**

Суммируя выигрыши противоборствующих коалиций получим:

	γ_1, δ_1	γ_1, δ_2	γ_2, δ_1	δ_2, γ_2
α_1, β_1	-1	2	1	-2
α_1, β_2	1	2	-1	-2
α_2, β_1	-2	4	2	-4
α_2, β_2	2	4	-2	-4

- Нижняя цена игры (максимин):

$$v_{51} = -2$$

- Верхняя цена игры (минимакс):

$$v_{52} = -2$$

Легко заметить:

$$v_{51} = v_{52}$$

Игра имеет решение в чистых стратегиях, т.к. верхняя и нижняя цена игры совпадают.

Для первого и второго игрока в равной степени приемлемы:

- α_2, β_1 ,
- α_1, β_1 ,
- α_1, β_2 ,
- α_2, β_2 ,

Для третьего и четвертого оптимальной будет стратегия δ_2, γ_2 .

2.3.2. I, III против II, IV

Суммируя выигрыши противоборствующих коалиций получим:

	β_1, δ_1	β_1, δ_2	β_2, δ_1	β_2, δ_2
α_1, γ_1	-1	0	1	-1
α_1, γ_2	-1	1	1	-1
α_2, γ_1	-2	2	2	0
α_2, γ_2	-2	2	2	-2

- Нижняя цена игры (максимин):

$$v_{61} = -1$$

- Верхняя цена игры (минимакс):

$$v_{62} = -1$$

Легко заметить:

$$v_{61} = v_{62}$$

Игра имеет решение в чистых стратегиях, т.к. верхняя и нижняя цена игры совпадают.

Для первого и третьего игрока оптимальной будет стратегия: α_1, γ_1 Для третьего и четвертого игрока оптимальной будет стратегия: β_1, δ_1

2.3.3. I, IV против II, III

Суммируя выигрыши противоборствующих коалиций получим:

	β_1, γ_1	β_1, γ_2	β_2, γ_1	β_2, γ_2
α_1, δ_1	-2	2	-2	2
α_1, δ_2	0	1	1	-1
α_2, δ_1	-4	4	-4	4
α_2, δ_2	-2	2	0	-2

- Нижняя цена игры (максимин):

$$v_{\gamma_1} = -1$$

- Верхняя цена игры (минимакс):

$$v_{\gamma_2} = 0$$

Игра не имеет решения в чистых стратегиях. Придется искать решение в смешанных стратегиях.

- Вероятностный вектор применения стратегий игроков α и δ :

$$P = (p_{\alpha_1, \delta_1}, p_{\alpha_1, \delta_2}, p_{\alpha_2, \delta_1}, p_{\alpha_2, \delta_2})$$

- Вероятностный вектор применения стратегий игроков β и γ :

$$Q = (q_{\beta_1, \gamma_1}, q_{\beta_1, \gamma_2}, q_{\beta_2, \gamma_1}, q_{\beta_2, \gamma_2})$$

Попробуем решить задачу, сведя ее к ЗЛП¹ Сделаем все элементы матрицы положительными. Для это прибавим к каждому элементу матрицы число 5.

$A + 5 \cdot E$; где E — матрица из единиц

	β_1, γ_1	β_1, γ_2	β_2, γ_1	β_2, γ_2
α_1, δ_1	3	7	3	7
α_1, δ_2	5	6	6	4
α_2, δ_1	1	9	1	9
α_2, δ_2	3	7	5	3

¹Задача линейного программирования

Если записать просто матрицу, то

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 6 & 4 \\ 1 & 9 & 1 & 9 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

В качестве прямой задачи возьмем задачу определения оптимальной стратегии игроков β, γ :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 & \rightarrow \max \\ 3y_1 + 7y_2 + 3y_3 + 7y_4 & \leq 1 \\ 5y_1 + 6y_2 + 6y_3 + 4y_4 & \leq 1 \\ 1y_1 + 9y_2 + 1y_3 + 9y_4 & \leq 1 \\ 3y_1 + 7y_2 + 5y_3 + 3y_4 & \leq 1 \end{cases}$$

Приведем к каноническому виду:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 & \rightarrow \max \\ 3y_1 + 7y_2 + 3y_3 + 7y_4 + y_5 & = 1 \\ 5y_1 + 6y_2 + 6y_3 + 4y_4 + y_6 & = 1 \\ 1y_1 + 9y_2 + 1y_3 + 9y_4 + y_7 & = 1 \\ 3y_1 + 7y_2 + 5y_3 + 3y_4 + y_8 & = 1 \end{cases}$$

Шаг 0

		1	1	1	1	0	0	0	0
БП	БР	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
y_5	1	3	7	3	7	1	0	0	0
y_6	1	5	6	6	4	0	1	0	0
y_7	1	1	9	1	9	0	0	1	0
y_8	1	3	7	5	3	0	0	0	1
ИС	0	-1	-1	-1	-1	0	0	0	0

(Задача 2)

2 Коалиционные игры

Шаг 1

		1	1	1	1	0	0	0	0
БП	БР	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
y_5	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{17}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{23}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	0	0
y_1	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0
y_7	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{39}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{41}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	1	0
y_8	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{17}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0	1
ИС	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	0

Шаг 2

		1	1	1	1	0	0	0	0
БП	БР	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
y_4	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{17}{23}$	$-\frac{3}{23}$	1	$\frac{5}{23}$	$-\frac{3}{23}$	0	0
y_1	$\frac{3}{23}$	1	$\frac{14}{23}$	$\frac{30}{23}$	0	$-\frac{4}{23}$	$\frac{7}{23}$	0	0
y_7	$\frac{2}{23}$	0	$\frac{40}{23}$	$\frac{20}{23}$	0	$-\frac{41}{23}$	$\frac{20}{23}$	1	0
y_8	$\frac{8}{23}$	0	$\frac{68}{23}$	$\frac{34}{23}$	0	$-\frac{3}{23}$	$-\frac{12}{23}$	0	1
ИС	$\frac{5}{23}$	0	$\frac{8}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	$\frac{1}{23}$	$\frac{4}{23}$	0	0

(Задача 2)

2 Коалиционные игры

Данная задача имеет оптимальное решение

$$Y^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{23} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{23} \end{pmatrix}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = \frac{5}{23}$$

Так как ЗЛП по определению оптимальной стратегии игрока является двойственной по отношению к рассмотренной, то решение можно найти, используя решение прямой задачи Y^* :

$$X^* = C_B \cdot P^{-1}$$

где C_B - вектор-строка, составленная из коэффициентов целевой функции при базисных переменных.

$$C_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- матрица, составленная из коэффициентов, расположенных в столбцах базисных переменных в начальной симплекс-таблице.

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

После не сложных преобразований получим:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{23} & \frac{7}{23} & 0 & 0 \\ \frac{5}{23} & -\frac{3}{23} & 0 & 0 \\ -\frac{41}{23} & \frac{20}{23} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{23} & -\frac{12}{23} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^* = (1, 1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (1, 1, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{23} & \frac{7}{23} & 0 & 0 \\ \frac{5}{23} & -\frac{3}{23} & 0 & 0 \\ -\frac{41}{23} & \frac{20}{23} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{23} & -\frac{12}{23} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{23}, \frac{4}{23}, 0, 0 \right)$$

Можно найти цену игры как:

$$\tilde{v} = \frac{1}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4} = \frac{23}{5}$$

Но это не будет действительной ценой игры.

Вспомним, что до составления симплекс-матрицы мы прибавили к каждому элементу начальной матрицы число 5. Теперь для получения настоящей цены игры его надо отнять от \tilde{v} .

Таким образом получим:

$$v = \tilde{v} - 5 = \frac{23}{5} - 5 = \frac{23}{5} - \frac{25}{5} = -\frac{2}{5}$$

Цена игры: $v = -\frac{2}{5}$

Но мы пока не забыли число \tilde{v} . На основании него еще предстоит определить оптимальные стратегии игроков.

$$\frac{p_{\alpha_1, \delta_1}}{\tilde{v}} = \frac{1}{23}$$

$$\frac{p_{\alpha_1, \delta_2}}{\tilde{v}} = \frac{4}{23}$$

$$\frac{p_{\alpha_2, \delta_1}}{\tilde{v}} = 0$$

$$\frac{p_{\alpha_2, \delta_2}}{\tilde{v}} = 0$$

Тогда получим:

$$p_{\alpha_1, \delta_1} = \frac{1}{5}$$

$$p_{\alpha_1, \delta_2} = \frac{4}{5}$$

$$p_{\alpha_2, \delta_1} = 0$$

$$p_{\alpha_2, \delta_2} = 0$$

(Задача 2)

2 Коалиционные игры

И аналогично:

$$q_{\beta_1, \gamma_1} = \frac{3}{5}$$

$$q_{\beta_1, \gamma_2} = 0$$

$$q_{\beta_2, \gamma_1} = 0$$

$$q_{\beta_2, \gamma_2} = \frac{2}{5}$$

Ну и в заключение:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}; \quad v = -\frac{2}{5}$$

3. Непрерывные игры

3.1. Задача

Пусть есть некоторая непрерывная² игра:

$$F(x, y) = \frac{(1 + Nx)(1 + 2y)}{(1 + 2xy)^2}; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq a;$$

и

- Оптимальное решение первого игрока

$$f_1^*(x) = \frac{1}{c(1 + Nx) \ln 2}$$

- Оптимальное решение второго игрока

$$f_2^*(x) = \frac{2}{b(1 + 2y) \ln 2}$$

N — порядковый номер в группе (пусть будет 25).

Найти a , b , c .

3.2. Конкретизация задачи

$$F(x, y) = \frac{(1 + 25x)(1 + 2y)}{(1 + 2xy)^2}; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq a;$$

и

- Оптимальное решение первого игрока

$$f_1^*(x) = \frac{1}{c(1 + 25x) \ln 2}$$

- Оптимальное решение второго игрока

$$f_2^*(x) = \frac{2}{b(1 + 2y) \ln 2}$$

²В противовес дискретным.

3.3. Условия нормировки

3.3.1. Для оптимального решения первого игрока

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1^*(x) dx = \int_0^1 f_1^*(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{c(1+25x) \ln 2} = 1$$

Из этого не трудно установить, что:

$$c = \frac{\ln(25+1)}{25 \ln 2} = \frac{1}{25} \log_2(26)$$

3.3.2. Для оптимального решения второго игрока

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_2^*(y) dy = \int_0^a f_2^*(y) dy = \int_0^a \frac{2}{b(1+2y) \ln 2} dy$$

Из этого получим:

$$\ln(2a+1) = b \ln 2$$

$$b = \frac{\ln(1+2a)}{\ln 2} = \log_2(1+2a)$$

3.4. Оптимальность

$$\int_d^c F(t, y) f_2^*(y) dy \leq v \leq \int_a^b F(x, s) f_1^*(x) dx$$

Посчитаем первый и второй интегралы.

3.4.1. Посчитаем первый интеграл.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \frac{(1+25t)(1+2y)}{(1+2ty)^2} \frac{2}{b(1+2y)\ln 2} dy &= \frac{2(1+25t)}{2tb\ln 2} \cdot \int_a^b \frac{d(1+2ty)}{(1+2ty)^2} = \\
&= -\frac{2(1+25t)}{2tb\ln 2} \cdot \left(\frac{1}{(1+2ta)} - \frac{1}{(1+2t0)} \right) = \frac{2(1+25t)}{2tb\ln 2} \cdot \frac{2ta}{(1+2ta)} = \\
&= \frac{2(1+25t)}{\ln(2a+1)} \cdot \frac{a}{(1+2ta)}
\end{aligned}$$

3.4.2. Посчитаем второй интеграл.

$$\int_a^b \frac{(1+25x)(1+2s)}{(1+2ts)^2} \frac{1}{c(1+25x)\ln 2} dx = -\frac{1+2s}{2s \cdot (c\ln 2)} \cdot \left(\frac{1}{1+2s} - 1 \right)$$

Далее не трудно получить, что

$$\int_a^b \frac{(1+25x)(1+2s)}{(1+2ts)^2} \frac{1}{c(1+25x)\ln 2} dx = \frac{1}{\ln 2} = \frac{25}{\ln 26}$$

3.4.3. Неравенство

$$\int_d^c F(t, y) f_2^*(y) dy \leq v \leq \int_a^b F(x, s) f_1^*(x) dx$$

$$\frac{2(1+25t)}{\ln(2a+1)} \cdot \frac{a}{(1+2ta)} \leq v \leq \frac{25}{\ln 26}$$

$$\frac{2(1+25t)}{\ln(2a+1)} \cdot \frac{a}{(1+2ta)} \leq \frac{25}{\ln 26}$$

- Пусть $t = 0$, тогда

$$\frac{2a}{\ln(2a+1)} \leq \frac{25}{\ln 26}$$

$\frac{2a}{\ln(2a+1)}$ — возрастающая. Из этого следует, что $a \leq \frac{25}{2}$. Если $a = \frac{25}{2}$ равенство становится строгим.

- Пусть $t = 1$, тогда

$$\frac{2(1+25)}{\ln(2a+1)} \cdot \frac{a}{(1+2a)} \leq \frac{25}{\ln 26}$$

$\frac{2(1+25)}{\ln(2a+1)} \cdot \frac{a}{(1+2a)}$ — убывающая. Это не сложно определить если вычислить производную функции (она меньше 0). Если $a = \frac{25}{2}$ равенство становится строгим. Значит $a \geq \frac{25}{2}$.

Не сложно заметить:

$$a \leq \frac{25}{2}; \quad a \geq \frac{25}{2} \Rightarrow a = \frac{25}{2}$$

$$a = \frac{25}{2}$$

$$b = \frac{\ln(26)}{\ln 2} = \log_2(26)$$

$$c = \frac{\ln(26)}{25 \ln 2} = \frac{1}{25} \log_2(26)$$

4. Внутрикоалиционная задача (НЛП)

4.1. Задача

На основе задания № 2 составить и решить внутрикоалиционную игру.

4.2. Составление

Ввиду простоты чисел во втором задании, мы не будем составлять внутрикоалиционную игру на ее основе, а составим новую. Пусть это будут игроки 5 и 6 против 7. Рассмотрим коалиционную игру.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4.3. Упрощение

Если убрать заведомо невыгодные стратегии, игра упростится до вида:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Найдем смешанные стратегии игроков:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

4.4. Задача нелинейного программирования

Пара (P^*, Q^*) — оптимальна по Нешу, тогда и только тогда, когда $\exists \mu, \nu$:

$$(P^*, Q^*) = \arg \max_{(P, Q) \in Z} (PAQ - PBQ - \mu - \nu)$$

$$Z = \{(P, Q) : P \geq 0, Q \geq 0, (P, f) = 1, (Q, g) = 1; AQ \leq \mu f, PB \leq \nu g\}$$

В соответствии с этим сопоставим задачу оптимизации.

$$\left\{ \begin{array}{l} PAQ + PBQ - \mu - \nu \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^2 p_i = 1 \\ \sum_{i=1}^2 q_i = 1 \\ P \geq 1 \\ Q \geq 1 \\ AQ \leq \mu f \\ PB \leq \nu g \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_1, p_2) \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \mu - \nu \rightarrow \max \\ p_1 + p_2 = 1 \\ q_1 + q_2 = 1 \\ p_i \geq 1, i = 1, 2 \\ q_i \geq 1, i = 1, 2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \leq \mu f \\ (p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \leq \nu g \end{array} \right.$$

(Задача 4)

4 Внутрикоалиционная задача (НЛП)

$$\left\{ \begin{array}{l} (p_1 + 3p_2, 5p_1 + 2p_2) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (-2p_1, -2p_2) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - \mu - \nu \rightarrow \max \\ p_2 = 1 - p_1 \\ q_2 = 1 - q_1 \\ p_i \geq 1, i = 1, 2 \\ q_i \geq 1, i = 1, 2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \leq \mu f \\ (p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \leq \nu g \end{array} \right.$$

Далее упрощая систему получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{5} - \nu \rightarrow \max \\ p_1 \geq 0 \\ p_1 \geq \frac{-\nu}{2} \\ p_1 \leq \frac{\nu+2}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{2} \\ \nu = -1 \end{array} \right. \Rightarrow p_2 = \frac{1}{2}$$

Таким образом для системы с вычеркнутыми стратегиями:

$$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), Q = \left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} \right)$$

Для начальной системы:

$$P = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), Q = \left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} \right)$$

5. Многокритериальная оптимизация

5.1. Задача

Дано уравнение.

$$r = Ne^{2\varphi i}; \quad N = 25$$

Построить график действительной и мнимой части функции в полярной системе координат. Эти графики будут выступать в роли критериев. Задать их в критериальном пространстве. Найти решение оптимальное по Парето, по Слейтеру и по Джоффриону для задачи минимизации.

5.2. Графики

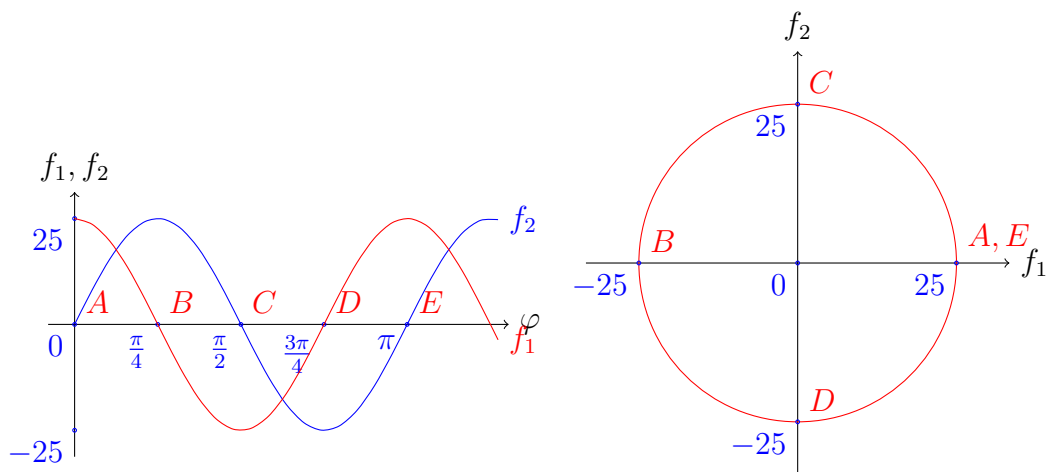
$$r = Ne^{2\varphi i} = N(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi);$$

или

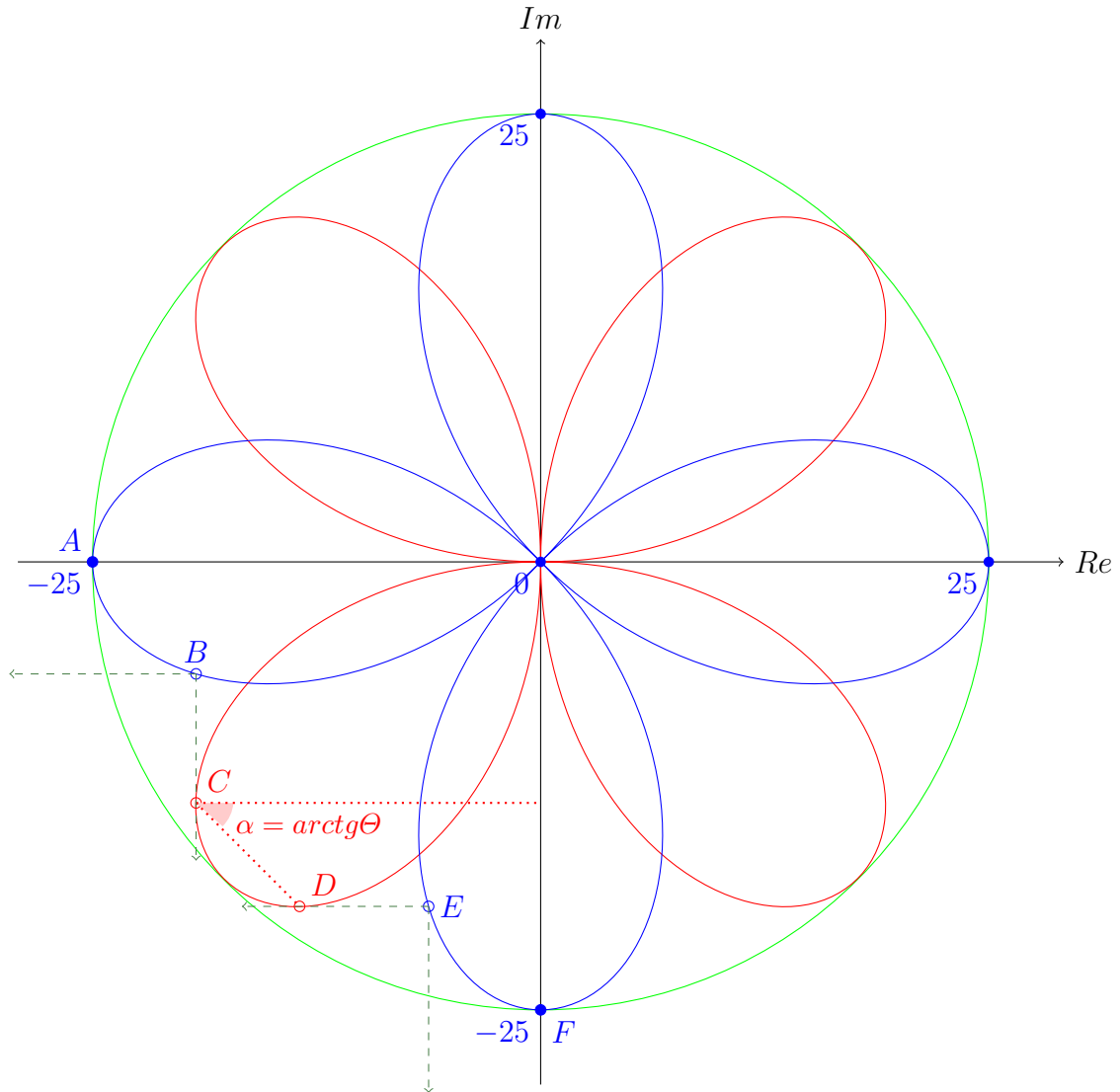
$$r = 25 \cos 2\varphi + 25i \sin 2\varphi;$$

- $f_1 = 25 \cos 2\varphi;$
- $f_2 = 25 \sin 2\varphi;$

5.2.1. В декартовой системе



5.2.2. В полярной системе



5.3. Парето

$$\begin{aligned}
 P = & [180 + 360 \cdot k, 198 + 360 \cdot k) \cup \\
 & \cup [215 + 360 \cdot k, 235 + 360 \cdot k] \cup \\
 & \cup (252 + 360 \cdot k, 270 + 360 \cdot k], \quad k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

Значения даны в градусах.

$$\mathfrak{Z}^P = [A, B) \cup [C, D] \cup (E, F]$$

5.4. Слейтер

$$\begin{aligned} S = & [180 + 360 \cdot k, 198 + 360 \cdot k] \cup \\ & \cup [215 + 360 \cdot k, 235 + 360 \cdot k] \cup \\ & \cup [252 + 360 \cdot k, 270 + 360 \cdot k], \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Значения даны в градусах.

$$\mathfrak{Z}^S = [A, B] \cup [C, D] \cup [E, F]$$

5.5. Джоффрион

y^0 — эффективная по Джоффриону, если

$$\begin{aligned} \forall y, \quad y_{re}^0 < y_{re}, \quad y_{im}^0 > y_{im} \\ \exists \theta > 0, \quad \frac{y_{re}^0 - y_{re}}{y_{im} - y_{im}^0} \leq \theta \end{aligned}$$

Причем

$$\theta = \operatorname{tg} \alpha$$

Тогда по заданию:

$$\begin{aligned} G = & (180 + 360 \cdot k, 198 + 360 \cdot k) \cup \\ & \cup (215 + 360 \cdot k, 235 + 360 \cdot k) \cup \\ & \cup (252 + 360 \cdot k, 270 + 360 \cdot k), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Значения даны в градусах.

$$\mathfrak{Z}^G = (A, B) \cup (C, D) \cup (E, F)$$

6. Метод уступок

6.1. Задача

$$\begin{aligned} f_1 &= \sin x \\ f_2 &= \cos \frac{x}{N+2} \\ x &\in [0, 2 \cdot N \cdot \pi] \end{aligned}$$

Нужно будет, используя метод уступок, задавая первую уступку:

$$\Delta_1 = \frac{1}{3} |f_1(x^{10})|$$

Нужно найти оптимальное по Парето решение x^{20} и соотнести метод уступок с методом экономического свертывания. Найти соответствующие коэффициенты веса:

$$\Phi(x) = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$$

λ_i — коэффициенты веса, соответствующие оптимальному по Парето решению.

То есть связь решений двух методов. Можно считать, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, то есть соотнести бесконечность и отрезок от 0 до 1.

6.2. Конкретизация задачи

$$N = 25 \Rightarrow \begin{cases} f_1 = \sin x \\ f_2 = \cos \frac{x}{25+2} \\ x \in [0, 2\pi 25] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 = \sin x \\ f_2 = \cos \frac{x}{27} \\ x \in [0, 50\pi] \end{cases}$$

6.3. Первый критерий

$$f_1 \rightarrow \min_{x \in [0, 50 \cdot \pi]}$$

$$x^{10} = \left\{ \frac{3 \cdot \pi}{2} + 2\pi k; k = \overline{0, 25} \right\}$$

$$f_1(x^{10}) = -1$$

Опишем параметр метода уступок:

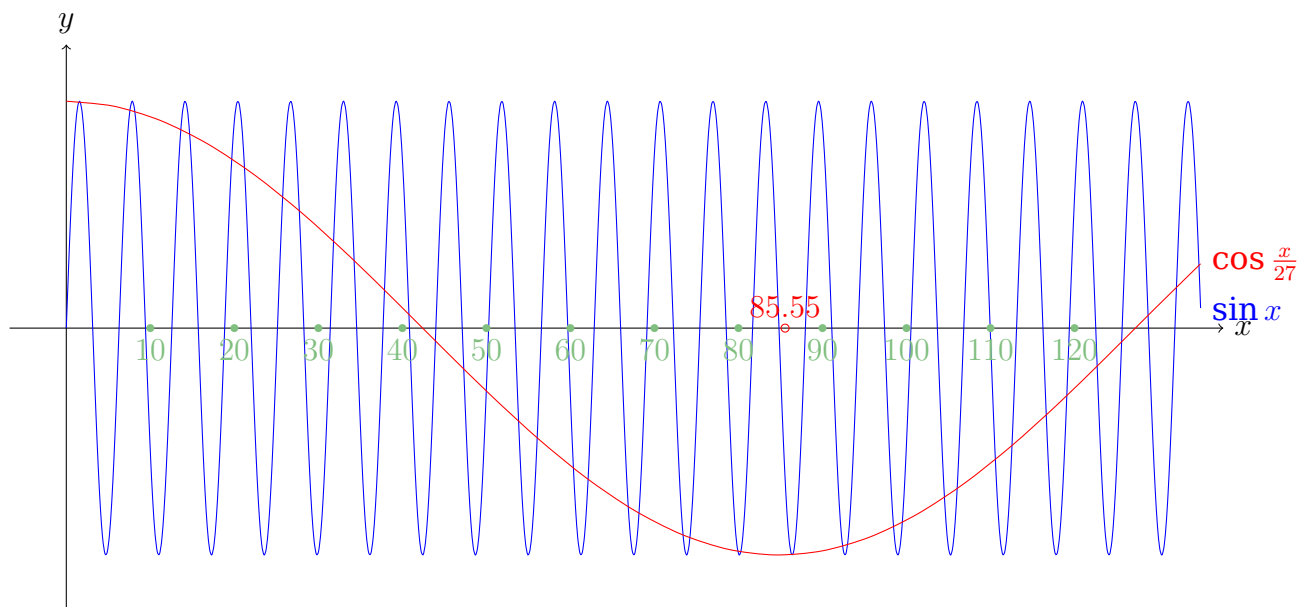
$$\Delta_1 = \frac{1}{3} \cdot |f_1(x^{10})| = \frac{1}{3} \cdot |-1| = \frac{1}{3}$$

6.4. Второй критерий

$$f_2 \rightarrow \min_{x \in M}$$

$$M = [0, 50 \cdot \pi] \cap \left\{ x; f_1(x) \leq f_1(x^{10}) + \Delta_1 \right\} = [0, 50 \cdot \pi] \cap \left\{ x; f_1(x) \leq \frac{-2}{3} \right\}$$

$$x^{20} = \left\{ 27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right) \right\} = 85.5527293032$$



Точка оптимально по Парето $x^{20} \in P$ в силу определения:

$$\nexists x_i : \begin{cases} f_1(x) < f_1(x^{20}) \\ f_2(x) \leq f_2(x^{20}) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f_1(x) \leq f_1(x^{20}) \\ f_2(x) < f_2(x^{20}) \end{cases}$$

6.5. Метод экономического свертывания

Соотнесем с методом экономической свертки. Найдем: $\lambda_1, \lambda_2 : \lambda_1 = 1 - \lambda_2$.

$$\Phi(x) = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)$$

$$x^{20} = \arg \min_{x \in [0, 50\pi]} \Phi(x) = \arg \min_{x \in [0, 50\pi]} \Phi(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))$$

$$\lambda_1 f_1'(x^{20}) + \lambda_2 f_2'(x^{20}) = 0$$

$$\lambda_1 (\cos x^{20}) + (1 - \lambda_1) \left(-\frac{1}{18} \cdot \sin \frac{x^{20}}{18} \right) = 0$$

$$\lambda_1 \left(\cos x^{20} + \frac{1}{18} \cdot \sin \frac{x^{20}}{18} \right) = \frac{1}{18} \cdot \sin \frac{x^{20}}{18}$$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{1}{18} \cdot \sin \frac{x^{20}}{18}}{\cos x^{20} + \frac{1}{18} \cdot \sin \frac{x^{20}}{18}}$$

$$\lambda_1 = \frac{\frac{1}{18} \cdot \sin \frac{27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)}{18}}{\cos\left(27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)\right) + \frac{1}{18} \cdot \sin \frac{27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)}{18}}$$

Таким образом

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\frac{1}{18} \cdot \sin \frac{27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)}{18}}{\cos\left(27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)\right) + \frac{1}{18} \cdot \sin \frac{27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)}{18}} \\ \lambda_2 = 1 - \frac{\frac{1}{18} \cdot \sin \frac{27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)}{18}}{\cos\left(27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)\right) + \frac{1}{18} \cdot \sin \frac{27 \cdot \pi - \arcsin\left(\frac{-2}{3}\right)}{18}} \end{cases}$$

x^{20} , найденное методом уступок, соотносится с решением, найденным методом экономического свертывания, если соответствующее λ выглядит как в системе выше.