Московский авиационный институт
(государственный TEXнический университет)

Факультет прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Курсовая работа по курсу «Уравнения математической физики»
Вариант 18;

Студент: И. К. Никитин
Преподаватель: Э. И. Иванов

Москва, 2009

Содержание

1 Линейное однородное уравнение 1-ого порядка

ПРОВЕРЕНО

Найти общее решение линейного однородного уравнения 1-ого порядка

$$\operatorname{ctg} x \frac{\partial U}{\partial x} + (y + 2\cos^2 x \cdot \operatorname{ctg} x)\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение

$$y' = \frac{y + 2 \cdot \cos^2 x \cdot \operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x}$$

$$y' = \frac{y}{\operatorname{ctg} x} + 2\cos^2 x$$

$$y' - \frac{y}{\operatorname{ctg} x} - 2\cos^2 x = 0$$

Решим его:

$$y' - \frac{1}{\operatorname{ctg} x} y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{\operatorname{ctg} x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\operatorname{ctg} x}$$

После не сложных вычислений получим:

$$\ln|y| = \ln\left|\frac{C}{\cos x}\right|$$

$$y = \frac{C}{\cos x}$$

$$C = C(x)$$

$$\frac{C'(x)}{\cos x} + \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)\sin x}{\cos^2 x} = 2\cos^2 x$$

$$\frac{C'(x)}{\cos x} = 2\cos^2 x$$

(Задача 1) Линейное однородное уравнение 1-ого порядка

$$C'(x) = 2\cos^3 x$$

Тогда:

$$C'(x) = 2\cos^3 x$$

$$C(x) = 2\int \cos^3 x dx = 2\int (1-\sin^2 x) d\sin x = 2\int d\sin x - 2\int \sin^2 x \sin x = 2\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + C_1$$

Значит:

$$C(x) = 2\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + C_1$$

Так как,

$$y = \frac{C}{\cos x}$$

$$y = \frac{2\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + C_1}{\cos x}$$

$$y\cos x = 2\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + C_1$$

$$y\cos x - \left(2\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x\right) = C_1$$

Таким образом:

$$u(x, y) = F\left(y\cos x - \left(2\sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x\right)\right)$$

Ответ:

$$u(x, y) = F\left(y\cos x - 2\sin x + \frac{2}{3}\sin^3 x\right)$$

2 Дифференциальное уравнения второго порядка

ПРОВЕРЕНО

Определить тип уравнения 2-ого порядка и привести его к каноническому виду в области гиперболичности:

$$3u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} - 3u_x + u_y = 0$$

Решение.

- Вычислим дискриминант:
$$D = 4 - 3 = 1 > 0$$
Значит, уравнение — *гиперболического типа*

- Составим характеристическое уравнение.
$$3dy^2 - 4dydx + dx^2 = 0$$
То есть
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{4}{3} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{3} = 0$$
Решая последнее, получим:
$$\left[\begin{aligned} \left(\tfrac{dy}{dx}\right)_1 &= -\tfrac{1}{3} \\ \left(\tfrac{dy}{dx}\right)_2 &= -1 \end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned} y_1 &= -\tfrac{1}{3}x + C_1 \\ y_2 &= -x + C_2 \end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned} C_1 &= y + \tfrac{1}{3}x \\ C_2 &= y + x \end{aligned}\right.$$

- Введём новые переменные
$$\begin{aligned} \zeta &= y + \tfrac{1}{3}x \\ \eta &= y + x \end{aligned}$$

- Проверим корректность ζ η:

$$\begin{vmatrix} \zeta_x & \zeta_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3} \neq 0$$

Корректны. Значит функции

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) = &\ \zeta \\ \psi(x,y) = &\ \eta \end{aligned}$$

— независимы

- Перепишем исходное уравнение в новых переменных

1. $u_x = u_\zeta \zeta_x + u_\eta \eta_x \Rightarrow u_x = u_\eta + \frac{1}{3}u_\zeta$
   Аналогично:

$$\begin{aligned} u_y &= u_\eta + u_\zeta \\ u_{xx} &= u_{\eta\eta} + \tfrac{1}{9}u_{\zeta\zeta} + \tfrac{2}{3}u_{\zeta\eta} \\ u_{xy} &= u_{\eta\eta} + \tfrac{1}{3}u_{\zeta\zeta} + \tfrac{4}{3}u_{\zeta\eta} \\ u_{yy} &= u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + 2u_{\zeta\eta} \end{aligned}$$

2. Подставим в исходное:

$$3\left(u_{\eta\eta} + \frac{1}{9}u_{\zeta\zeta} + \frac{2}{3}u_{\zeta\eta}\right) - 4\left(u_{\eta\eta} + \frac{1}{3}u_{\zeta\zeta} + \frac{4}{3}u_{\zeta\eta}\right) + (u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + 2u_{\zeta\eta}) - 3(u_\eta + \frac{1}{3}u_\zeta) + (u_\eta + u_\zeta)$$

3. Раскрывая скобки и приводя подобные получим:

$$\frac{4}{3}u_{\zeta\eta} = -2u_\eta$$

$$u_{\zeta\eta} = -\frac{3}{2}u_\eta$$

   Получили первую каноническую форму уравнения гиперболического типа.

Ответ: Тип: *гиперболический*
Канонический вид: $u_{\zeta\eta} = -\frac{3}{2}u_\eta$

3 Неоднородное волновое уравнение

ПРОВЕРЕНО

Методом разделения переменных решить задачу для неоднородного волнового уравнения:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + Ax + B, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0 \\ u_x(l,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = U, & x \in [0,l] \\ u_t(x,0) = V, & x \in [0,l] \end{cases}$$

Решение.

Пусть (по заданию):

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \\ U = 1 \\ V = 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + 2x + 1, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = 0, & t > 0 \\ u_x(l,t) = 0, & t > 0 \\ u(x,0) = 1, & x \in [0,l] \\ u_t(x,0) = 0, & x \in [0,l] \end{cases}$$

Пусть: $u = v + w$ При этом, $w = 1 + t$ Тогда, подставляя в начальное, получим:

$$\begin{cases} v_{tt} = a^2 v_{xx} + 2x + 1, & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ v_x(0,t) = 0, & t > 0 \\ v_x(l,t) = 0, & t > 0 \\ v(x,0) = 0, & x \in [0,l] \\ v_t(x,0) = 0, & x \in [0,l] \end{cases}$$

Пусть $v = X \cdot T$ тогда

$$X \cdot T' = a^2 X'' \cdot T + 2x + 1$$

Далее $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X'(l) = 0 \end{cases} \Rightarrow X_n = \cos\frac{\pi n x}{l}$ и $\lambda_n = \left(\frac{\pi n x}{l}\right)^2$

Таким образом получим:

$$\sum_0^\infty T_n'' \cdot \cos\frac{\pi n x}{l} = -\sum_0^\infty \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot T_n \cdot \cos\frac{\pi n x}{l} + \sum_0^\infty [2x+1] \cdot \cos\frac{\pi n x}{l}$$

Найдём $[2x+1]_n$,

$$[2x+1]_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l (2x+1)\cos\frac{\pi n x}{l} dx$$

после несложных выкладок (взятие интеграла по частям)

$$[2x+1]_n = \frac{4l((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}$$

Таким образом:

$$T_n'' = -\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot T_n + \frac{4l((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}$$

Запишем как систему:

$$\begin{cases} T_n'' + \left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 \cdot T_n = \frac{4l((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} \\ T_n(0) = 0 \\ T_n'(0) = 0 \end{cases}$$

Найдём T, как

$$T = T_{\text{оо}} + T_{\text{чн}}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} T_{\text{оо}} &= C_1 \cos\frac{\pi n a}{l} + C_2 \sin\frac{\pi n x}{l} \\ T_{\text{чн}} &= C_3 \end{aligned}$$

Подставляя в главное, найдём

$$\begin{aligned} C_1 &= -C_3 \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= \frac{\frac{4l((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2}}{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2} \end{aligned}$$

Значит

$$\begin{aligned} C_1 &= -\frac{\frac{4l((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}}{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2} \\ C_2 &= 0 \\ C_3 &= \frac{\frac{4l((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}}{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2} \end{aligned}$$

$$T_n = \cos\frac{\pi n a}{l} \cdot \frac{\frac{4l((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}}{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2} + \frac{\frac{4l((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}}{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2}, \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{Z}$$

$$V = \sum_0^\infty \cos\frac{\pi n x}{l} \cdot \left(\cos\frac{\pi n a}{l} \cdot \frac{\frac{4l((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}}{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2} + \frac{\frac{4l((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}}{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2}\right), \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{Z}$$

$$U = 1 + t + \sum_0^\infty \cos\frac{\pi n x}{l} \cdot \left(\cos\frac{\pi n a}{l} \cdot \frac{\frac{4l((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}}{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2} + \frac{\frac{4l((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}}{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2}\right), \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{Z}$$

Тогда можно записать ответ:
Ответ:

$$U = 1 + t + \sum_0^\infty \cos\frac{\pi n x}{l} \cdot \left(\cos\frac{\pi n a}{l} \cdot \frac{\frac{4l((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}}{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2} + \frac{\frac{4l((-1)^n-1)}{\pi^2 n^2}}{\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2}\right), \quad n \in \{0\} \cup \mathbb{Z}$$

4 Неоднородное уравнение теплопроводности

ПРОВЕРЕНО

Методом разделения переменных решить задачу для неоднородного уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 4xt + 1, & 0 < x < 0, t > 0 \\ u_x(0,t) = 2t^2, & t > 0 \\ u(1,t) = t, & t > 0 \\ u(x,0) = \cos\frac{5\pi}{2} - \cos\frac{7\pi}{2}, & x \in [0,1] \end{cases}$$

Решение.

Пусть: $u = v + w$

$$w = A(t)x + B(t)$$
$$w_x(0,t) = A(t); A(t) = 2t^2$$
$$w(1,t) = 2t^2 + B(t); B(t) = -2t^2 + t$$

Таким образом

$$w = 2t^2 x - 2t^2 + t$$
$$w_t = 4tx - 4t + 1$$

Подставим в исходное, получим:

$$\begin{cases} v'_t = a^2 v''_x x + 4t \\ v'_x(0,t) = 0 \\ v(1,t) = 0 \\ v(x,0) = \cos\frac{5\pi}{2} - \cos\frac{7\pi}{2}, \quad x \in [0,1] \end{cases}$$

Пусть $v = X \cdot T$ тогда

$$X \cdot T' = a^2 X'' \cdot T + 4t$$

Далее $\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow X_n = \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}$

$\lambda_n = \left(\frac{(2n+1)}{2}\right)^2$

Так как $v = X \cdot T$, т. е. $v(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, то

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

Таким образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n' \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2} = -\sum_{n=0}^{\infty} a^2 \left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^2 \cdot T_n \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} [4t]_n \cdot \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

где

$$[4t]_n = 2\int_0^1 4t\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}dx = \frac{16t}{2n+1} \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

Следовательно,

$$T_n' + \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 T_n = Z_n$$

$$Z_n = \frac{16t}{2n+1} \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi}{2}$$

Далее:

$$\begin{cases} T_n' + \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 T_n = Z_n \\ T_2(0) = 1 \\ T_3(0) = -1 \\ T_n(0) = 0; & n \neq 2, n \neq 3 \end{cases}$$

Решим

$$T_n' + \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 T_n = Z_n$$

$$T_n' + \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 T_n = 0$$

$$T_{\text{оо},n} = C_{1,n} e^{-(\lambda \cdot a)^2 t}$$

$$T_{\text{оо},n} = C_{1,n} e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 t}$$

$$T_{\text{чн},n} = C_{2,n} t + C_{3,n}$$

Необходимо найти $C_{1,n}$, $C_{2,n}$, $C_{3,n}$.
Подставим $T_{\text{чн},n}$ в Однородное ДУ:

$$C_{2,n} + \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 (C_{2,n}t + C_{3,n}) - Z_n = 0$$

$$C_{2,n} + \left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 (C_{2,n}t + C_{3,n}) - \frac{16t}{2n+1} \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = 0$$

Из этого получим:

$$C_{2,n} = \frac{16}{2n+1} \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2}$$

$$C_{3,n} = -\frac{16}{2n+1} \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^4}$$

- при $n = 2$, $T_2(0) = 1$
$$C_{1,n} = 1 + \frac{16}{5} \cdot \frac{1}{\left(\frac{5\pi a}{2}\right)^4}$$
- при $n = 3$, $T_3(0) = -1$
$$C_{1,n} = -1 - \frac{16}{7} \cdot \frac{1}{\left(\frac{7\pi a}{2}\right)^4}$$
- при $n \neq 2; n \neq 3;$, $T_n(0) = 0$

$$C_{1,n} = -C_{3,n} = \frac{16}{2n+1} \cdot \sin\frac{(2n+1)\pi}{2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^4}$$

Тогда, при

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}$$

$$T_n = C_{1,n}e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 t} + C_{2,n}t + C_{3,n}$$

Получим:

$$v(x,t)=\cos\frac{(5n+1)\pi x}{2}\cdot\left(C_{1,2}\cdot e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 t}+C_{2,2}t+C_{3,2}\right)$$
$$+\cos\frac{(7n+1)\pi x}{2}\cdot\left(C_{1,3}\cdot e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 t}+C_{2,3}t+C_{3,3}\right)$$
$$+\sum_{n=0;n\neq 2;n\neq 3;}^{\infty}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\cdot\left(C_{1,n}\cdot e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 t}+C_{2,n}t+C_{3,n}\right)$$

В таком случае запишем ответ.
Ответ:

$$\begin{cases}
u(x,t)=2t^2x-2t^2+t+\cos\frac{(5n+1)\pi x}{2}\cdot\left(C_{1,2}\cdot e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 t}+C_{2,2}t+C_{3,2}\right)\\
+\cos\frac{(7n+1)\pi x}{2}\cdot\left(C_{1,3}\cdot e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 t}+C_{2,3}t+C_{3,3}\right)\\
+\sum_{n=0;n\neq 2;n\neq 3;}^{\infty}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2}\cdot\left(C_{1,n}\cdot e^{-\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2 t}+C_{2,n}t+C_{3,n}\right)\\
C_{1,n}=\begin{cases}1+\frac{16}{5}\cdot\frac{1}{\left(\frac{5\pi a}{2}\right)^4} & n=2\\ -1-\frac{16}{7}\cdot\frac{1}{\left(\frac{7\pi a}{2}\right)^4} & n=3\\ \frac{16}{2n+1}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^4} & n\in\mathbb{Z}\ n\neq 2,3\end{cases}\\
C_{2,n}=\frac{16}{2n+1}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^2} & n\in\mathbb{Z}\\
C_{3,n}=-\frac{16}{2n+1}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2}\right)^4} & n\in\mathbb{Z}
\end{cases}$$

5 Задача для уравнения Пуассона в кольце

ПРОВЕРЕНО

Решить методом разделения переменных следующую задачу для уравнения Пуассона в кольце $0 < a < \rho < b$, при $m = 1, 2, 3$.

$$\begin{cases} \Delta u(\rho, \varphi) = 4 + 12\rho^2 \\ u(a, \varphi) = m \\ u(b, \varphi) = 2m \end{cases} \tag{1}$$

Решение.

Пусть $u = v + w$.

$$\begin{cases} \Delta v(\rho, \varphi) = 4 + 12\rho^2 \\ v(a) = 0 \\ v(b) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \Delta w(\rho, \varphi) = 0 \\ w(a, \varphi) = m \\ w(b, \varphi) = 2m \end{cases} \tag{3}$$

1 Разберёмся с v

Заметим, что $v(\rho, \varphi) = v(\rho)$
Распишем оператор Лапласа $\Delta u(\rho, \varphi) = 4 + 12\rho^2$:

$$u''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u'_\rho + \frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi} = \ 4 + 12\rho^2 \tag{4}$$

$$u''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u'_\rho = \ 4 + 12\rho^2 \tag{5}$$

$$\begin{cases} \rho v''_{\rho\rho} + v'_{\rho} = 4\rho + 12\rho^3 \\ v(a) = 0 \\ v(b) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Введём замену:

$$v'_{\rho} = X \qquad v''_{\rho\rho} = X'_{\rho} \qquad \rho X'_{\rho} + X = 4\rho + 12\rho^3 \tag{7}$$

Пусть $X = m \cdot n$
$\rho m' \cdot n + \rho m \cdot n' + m \cdot n = 4\rho + 12\rho^3$
$\rho m' \cdot n + m(\rho n' + n) = 4\rho + 12\rho^3$
$\rho n' + n = 0$
Опуская, не сложные вычисления:
$n = \frac{1}{\rho}$
Далее, получим:
$m' = 4\rho + 12\rho^3$
$m = 2\rho^2 + 3\rho^4 + C_1$

Тогда: $X = m \cdot n = 2\rho + 3\rho^3 + \frac{C_1}{\rho}$
$v'_{\rho} = 2\rho + 3\rho^3 + \frac{C_1}{\rho}$ Тогда: $v = \rho^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho^4 + C_1 \ln\rho + C_2$ Подставим :
$v(a) = a^2 + \frac{3}{4} \cdot a^4 + C_1 \ln a + C_2 = 0$
$v(b) = b^2 + \frac{3}{4} \cdot b^4 + C_1 \ln b + C_2 = 0$
Система: $\begin{cases} a^2 + \frac{3}{4} \cdot a^4 + C_1 \ln a + C_2 = 0 \\ b^2 + \frac{3}{4} \cdot b^4 + C_1 \ln b + C_2 = 0 \end{cases}$ Решая ее, получим:

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2)\right) \\ C_2 = -a^2 - \frac{3}{4}a^4 - \ln a \cdot C_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = \frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2)\right) \\ C_2 = -a^2 - \frac{3}{4}a^4 - \ln a \cdot \left(\frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2)\right)\right) \end{cases}$$

Учитывая, что

$$\begin{cases} v = \rho^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho^4 + C_1 \ln\rho + C_2 \\ C_1 = \frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2)\right) \\ C_2 = -a^2 - \frac{3}{4}a^4 - \ln a \cdot \left(\frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2)\right)\right) \end{cases}$$

получим:

$$v = \rho^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho^4 +$$
$$+ \ln\rho \cdot \left(\frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2) \right) \right)$$
$$+ \left(-a^2 - \frac{3}{4}a^4 - \ln a \cdot \left(\frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2) \right) \right) \right)$$

2 Разберёмся с w

$$\begin{cases} \Delta w(\rho, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ w(a, \varphi) = m \\ w(b, \varphi) = 2m \end{cases} \tag{8}$$

Запишем общий вид:

$w(\rho, \varphi) = A_0 + B_0 \ln\rho + \sum\limits_{n=1}^{\infty} ((A_n \rho^n + B_n \rho^{-n}) \cdot \cos(n\varphi) + (C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \cdot \sin(n\varphi))$

Подставим: $\begin{cases} w(a, \varphi) = A_0 + B_0 \ln a + \sum\limits_{n=1}^{\infty} ((A_n a^n + B_n a^{-n}) \cdot \cos(n\varphi) + (C_n a^n + D_n a^{-n}) \cdot \sin(n\varphi)) \\ w(b, \varphi) = A_0 + B_0 \ln b + \sum\limits_{n=1}^{\infty} ((A_n b^n + B_n b^{-n}) \cdot \cos(n\varphi) + (C_n b^n + D_n b^{-n}) \cdot \sin(n\varphi)) \end{cases}$

Не трудно заметить, что: при $\begin{cases} w(a, \varphi) = m \\ w(b, \varphi) = 2m \end{cases}$

$$A_n = B_n = C_n = D_n = 0, n \in [1, \infty]$$

Получим:

$\begin{cases} A_0 + B_0 \ln a = m \\ A_0 + B_0 \ln b = 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B_0 = \frac{m}{\ln b - \ln a} \\ A_0 = m - \ln a \cdot \frac{m}{\ln b - \ln a} \end{cases}$

$$w(\rho, \varphi) = m - \frac{m \ln a}{\ln b - \ln a} + \frac{m}{\ln b - \ln a} \cdot \ln\rho$$

3 Итого:

$u = v + w$ Значит:

$$u = m - \frac{m \ln a}{\ln b - \ln a} + \frac{m}{\ln b - \ln a} \cdot \ln \rho + \rho^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho^4 + \ln \rho \cdot \left(\frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2) \right) \right) +$$
$$+ \left(-a^2 - \frac{3}{4}a^4 - \ln a \cdot \left(\frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2) \right) \right) \right)$$

При $m = 2$

$$u = 2 - \frac{2 \ln a}{\ln b - \ln a} + \frac{2}{\ln b - \ln a} \cdot \ln \rho + \rho^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho^4 + \ln \rho \cdot \left(\frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2) \right) \right) +$$
$$+ \left(-a^2 - \frac{3}{4}a^4 - \ln a \cdot \left(\frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2) \right) \right) \right)$$

Ответ:

$$u = 2 - \frac{2 \ln a}{\ln b - \ln a} + \frac{2}{\ln b - \ln a} \cdot \ln \rho + \rho^2 + \frac{3}{4} \cdot \rho^4 + \ln \rho \cdot \left(\frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2) \right) \right) +$$
$$+ \left(-a^2 - \frac{3}{4}a^4 - \ln a \cdot \left(\frac{1}{\ln b + \ln a} \cdot \left(\frac{3}{4}(a^4 - b^4) + (a^2 - b^2) \right) \right) \right)$$

6 Задача для уравнения Лапласа в областях с плоскими границами

ПРОВЕРЕНО

Решить методом разделения переменных следующую задачу для уравнения Лапласа в областях с плоскими границами:

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 2 \\ u_x(0,y) = 0 \\ u(a,y) = y + a^2 \\ u_y(x,0) = 1 \\ u(x,b) = x^2 + b \end{cases} \tag{9}$$

Решение.

Пусть $u = v + w$. Здесь:

- v – общее однородное
- w — частное неоднородное

И пусть $w = x^2 + y$, тогда:

$$\begin{cases} \Delta w(x,y) = 0 \\ w_x(0,y) = 0 \\ w(a,y) = y + a^2 \\ w_y(x,0) = 1 \\ w(x,b) = x^2 + b \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \Delta v(x,y) = 0 \\ v_x(0,y) = 0 \\ v(a,y) = 0 \\ v_y(x,0) = 0 \\ v(x,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v''_{xx}(x,y) + v''_{yy}(x,y) = 0 \\ v_x(0,y) = 0 \\ v(a,y) = 0 \\ v_y(x,0) = 0 \\ v(x,b) = 0 \end{cases}$$

$$v(x,y) = X(x) \cdot Y(y)$$

$$X(x)'' \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y(y)'' = 0$$

$$\frac{X(x)''}{X(x)} = -\frac{Y(y)''}{Y(y)} = -\lambda$$

(Задача 6) Задача для уравнения Лапласа в областях с плоскими границами

Получим задачу Штурма-Лиувиля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'_x(0) = 0 \\ X(a) = 0 \end{cases}$$

Её решение:

$$X_n = \cos\left(\frac{\pi + 2\pi n}{2a}\right), \lambda = \left(\frac{\pi + 2\pi n}{2a}\right)^2$$

Далее,

$$\begin{cases} Y'' - \lambda Y = 0 \\ Y'_y(0) = 0 \\ Y(b) = 0 \end{cases}$$

$$Y = Ae^{\sqrt{\lambda}y} + Be^{-\sqrt{\lambda}y}$$

Производная:

$$Y'_y = -\sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}y} + Be^{-\sqrt{\lambda}y})$$

$$Y'_y(0) = -\sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}0} + Be^{-\sqrt{\lambda}0})$$

$$-\sqrt{\lambda}(Ae^{\sqrt{\lambda}0} + Be^{-\sqrt{\lambda}0}) = 0$$

$$-\sqrt{\lambda}(A + B) = 0$$

$$B = -A$$

$$Ae^{\sqrt{\lambda}b} + Be^{-\sqrt{\lambda}b} = 0$$

$$Ae^{\sqrt{\lambda}b} - Ae^{-\sqrt{\lambda}b} = 0$$

$$A(e^{\sqrt{\lambda}b} - e^{-\sqrt{\lambda}b}) = 0$$

$$A = B = 0$$

$$Y = 0$$

Значит

$$v(x, y) = 0$$

Таким образом,

$$u(x, y) = w = x^2 + y$$

(Задача 6)   Задача для уравнения Лапласа в областях с плоскими границами

Ответ:

$$u(x, y) = x^2 + y$$