

6. В результате исследования модели не только достигается поставленная цель, но и должна быть установлена всеми возможными способами (сравнением с практикой, сопоставлением с другими подходами) ее адекватность — соответствие объекту и сформулированным предположениям. Неадекватная модель может дать результат, сколь угодно отличающийся от истинного (ср. формулу (1) и результат упр. 1), и должна быть либо отброшена, либо соответствующим образом модифицирована.

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. В первой задаче п. 1, а) примените для нахождения величины V (скорости системы «пуля—груз» сразу после столкновения) не закон сохранения энергии, а закон сохранения импульса. Убедитесь, что для скорости пули v получается формула, дающая значение в $((M + m)/m)^{1/2}$ раз меньше, чем получающееся по формуле (1).

2. Пусть мощность лазера, сверлящего материал (п. 1, а)), зависит от времени, т. е. $W = W(t)$. Как изменится формула (3)? Остается ли в силе утверждение о том, что глубина выемки пропорциональна затраченной энергии?

3. Найдите момент времени, когда распадается последний атом радиоактивного вещества (п. 1, б)). Почему в модели (5) вещество распадается полностью лишь при $t \rightarrow \infty$?

4. Предположим, что в п. 1, в) рассматривается «идеальная» одноступенчатая ракета, у которой непрерывно отбрасывается отработавшая и ставшая ненужной часть структурной массы (к моменту полного сгорания топлива $m_s = 0$). Пользуясь законом сохранения импульса, покажите, что максимальная скорость такой ракеты определяется по формуле $v = (1 - \lambda) u \ln(m_0/m_p)$. Сравните ее с формулой (6). Почему идеальная ракета может достичь любой скорости?

5. Проверьте с использованием (8), что условие (7) есть условие минимальности для величины $t(\alpha)$. Из рис. 5 определите, какая скорость больше — v_a или v_b ? Пользуясь формулой (9), найдите, при каких углах α лучи света не проникают из среды a в среду b , т. е. когда реализуется эффект «полного внутреннего отражения света», используемый в ряде технических устройств.

6. Определите, как себя должна вести при больших t величина $r(t) = \alpha(t) - \beta(t) > 0$ в модели Мальтуса (10), чтобы численность популяции оставалась ограниченной при $t \rightarrow \infty$.

7. Перейдите в формуле (11) для многоступенчатой ракеты к пределу при $n \rightarrow \infty$ и убедитесь, что ее предельная скорость вычисляется по формуле для идеальной ракеты из упр. 4. Почему результаты совпадают?

8. Рассмотрите в логистической модели (12) малые отклонения от положения равновесия, т. е. ситуацию, когда решение имеет вид $N(t) = N_p + \delta N(t)$, где $|\delta N(t)| \ll N_p$. Покажите, что для величины $\delta N(t)$ в первом приближении справедлива линейная модель типа модели Мальтуса (10).

§ 2. Примеры моделей, получаемых из фундаментальных законов природы

По сравнению с п. 1 из § 1 более подробно и для более сложных объектов рассмотрим модели, следующие из законов Архимеда, Ньютона, Кулона и других хорошо известных законов. Обсудим некоторые свойства рассматриваемых объектов.

1. Траектория всплытия подводной лодки. Пусть подводная лодка, находящаяся в момент времени $t = 0$ на глубине H от поверхности моря и движущаяся с постоянной горизонтальной скоростью v

(рис. 8), получает приказ подняться на поверхность. Если промежуток времени, за который цистерны подлодки освобождаются от воды и заполняются воздухом, с тем чтобы ее средняя плотность ρ_1 стала меньше плотности воды ρ_0 , невелик, то можно считать, что в момент $t = 0$ на подлодку начинает действовать выталкивающая сила, большая, чем вес лодки. По закону Архимеда выталкивающая сила равна $F = gV\rho_0$, где g — ускорение свободного падения, V — объем подлодки. Суммарная сила, действующая на подлодку в вертикальном направлении, — разность между F и весом тела $P = gV\rho_1$, а сообщаемое ею ускорение по второму закону Ньютона равно

$$\rho_1 V \frac{d^2 h}{dt^2} = F - P = gV(\rho_0 - \rho_1).$$

Координата l , характеризующая горизонтальное положение подлодки, изменяется по закону движения тела с постоянной скоростью:

$$\frac{dl}{dt} = v.$$

Решая эти уравнения, находим, что

$$h(t) = g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1} t^2, \quad l(t) = vt, \quad (1)$$

и что лодка всплывет на поверхность в момент $t = t_k$, когда

$$h(t_k) = g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1} t_k^2 = H, \quad t_k = \left(\frac{\rho_1 H}{g(\rho_0 - \rho_1)} \right)^{1/2}.$$

При этом в горизонтальном направлении подлодка пройдет расстояние

$$L = vt_k = \left(\frac{\rho_1 H}{g(\rho_0 - \rho_1)} \right)^{1/2}.$$

Исключая из (1) время, найдем траекторию движения подлодки в координатах (l, h)

$$h = g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1 v^2} l^2,$$

которая оказывается параболой с вершиной в точке $l = 0, h = 0$ (при выводе (1) вертикальная скорость лодки, а также величины l и h принимались равными нулю в момент $t = 0$). Считалось также, что никакие другие вертикальные силы, кроме F и P , на подлодку не действуют. Это предположение верно лишь при малых скоростях всплытия, когда можно пренебречь сопротивлением воды движению лодки (см. упр. 1).

Итак, непосредственное применение закона Архимеда, определяющего величину выталкивающей силы, и закона Ньютона, связывающе-

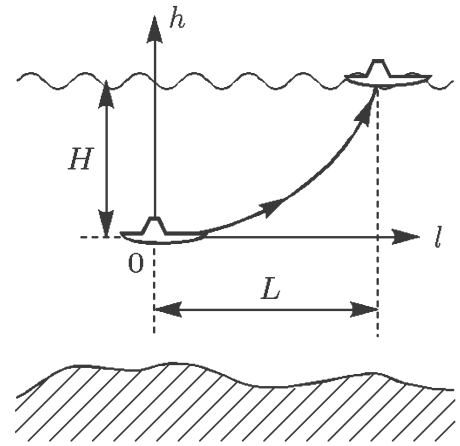


Рис. 8

го силу, действующую на тело, и его ускорение, позволило легко найти траекторию подлодки. Очевидно, что параболической траекторией обладает любое движущееся в плоскости тело, имеющее по одному из направлений постоянную скорость и на которое в другом направлении действует постоянная сила (уравнения (1) фактически дают параметрическую запись параболы). К таким движениям относятся, например, полет камня, брошенного с высоты H с горизонтальной скоростью v или полет электрона в электрическом поле плоского конденсатора. Однако в последнем случае получить траекторию тела непосредственно из фундаментальных законов нельзя, требуется применить более детальную процедуру. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

2. Отклонение заряженной частицы в электронно-лучевой трубке. Будем считать, что обкладки конденсатора электронно-лучевой трубки (рис. 9) представляют собой бесконечные плоскости

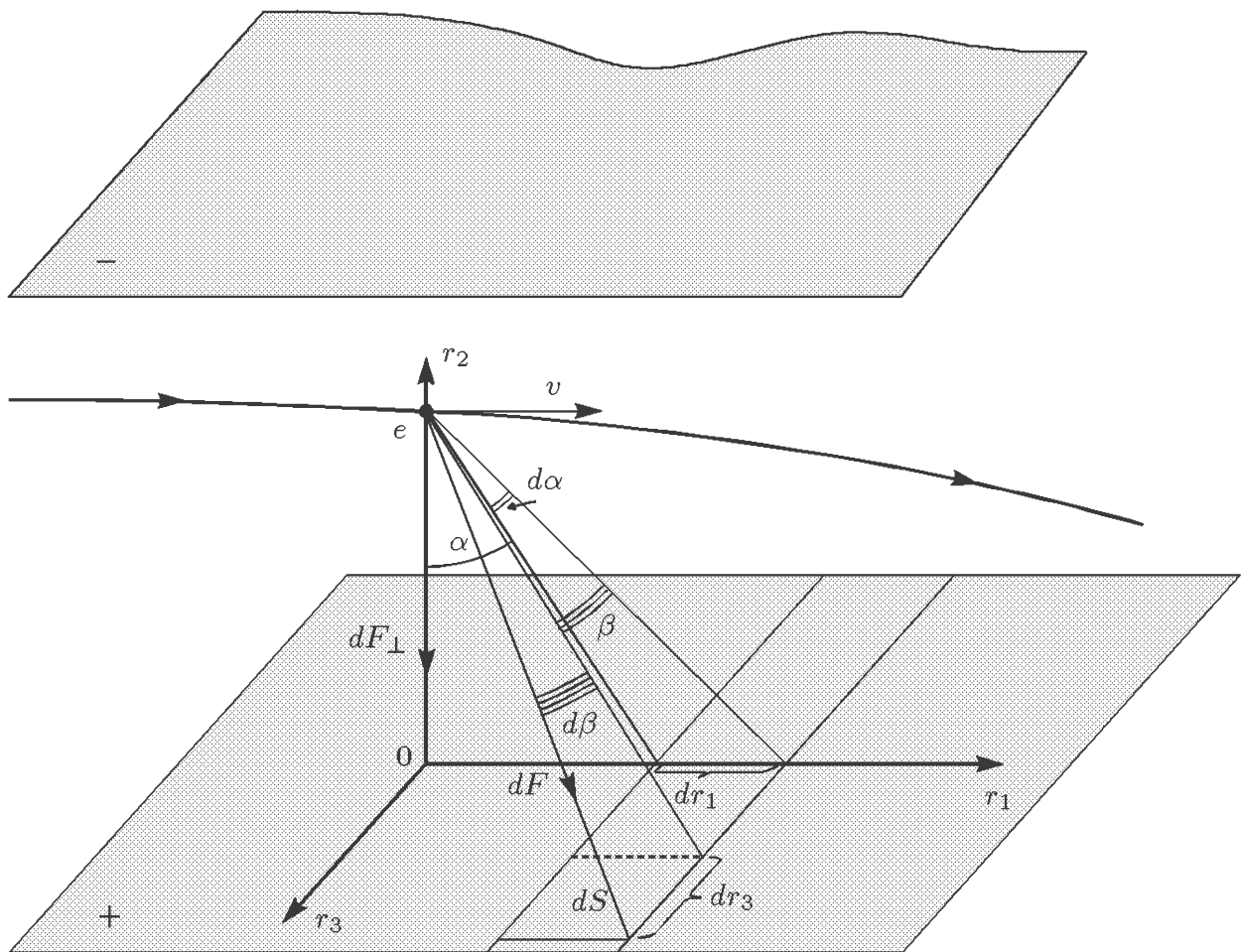


Рис. 9

(предположение справедливо в случае, если расстояние между обкладками много меньше их размеров, а электрон движется на большом удалении от их краев; упр. 2). Очевидно, что электрон будет притягиваться к нижней обкладке и отталкиваться от верхней. Сила притяжения F двух разноименных зарядов элементарно определяется из закона Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где q_1 и q_2 — величины зарядов, r — расстояние между ними. Сложность заключается в том, что в данном примере на обкладке находится бесконечно много зарядов, каждый из которых расположен на своем расстоянии от движущегося электрона. Поэтому необходимо сначала найти силу, индуцируемую каждым зарядом, и затем, просуммировав все элементарные силы, определить результирующее действие обкладок на электрон.

Разобьем всю плоскость нижней обкладки на элементарные «полоски», характеризующиеся координатами r_1, r_2, r_3 ; $-\infty < r_1, r_3 < \infty$; $r_2 \equiv 0$ (см. рис. 9).

Подсчитаем силу притяжения электрона зарядом, находящемся на элементарной площадке $ds = dr_1 dr_3$ и равным $dq = q_0 ds$, где q_0 — поверхностная плотность заряда на обкладке. Если частица находится на расстоянии r_2 от заряженной плоскости, то

$$dr_1 = r_2 (\operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) - \operatorname{tg} \alpha) = r_2 \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

(здесь учитывается малость величины $d\alpha$). Для определения величины dr_3 имеем

$$\frac{r_3 + dr_3}{r_1 + dr_1} = \frac{\operatorname{tg}(\beta + d\beta)}{\sin(\alpha + d\alpha)}, \quad \frac{r_3}{r_2} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Из последних двух формул находим

$$dr_3 = (r_1 + dr_1) \operatorname{tg}(\beta + d\beta) - r_1 \operatorname{tg} \beta = \frac{r_1 d\beta / (\cos^2 \beta) + dr_1 \operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha},$$

где, аналогично предыдущему, учтена также и малость величины $d\beta$. Умножая dr_1 на dr_3 и отбрасывая член более высокого порядка малости, получаем $ds = r_2 r_1 d\alpha d\beta / (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sin \alpha)$. Сила притяжения электрона с зарядом q_e к элементарной площадке ds равна

$$dF = \frac{q_e q_0 r_2 r_1 d\alpha d\beta}{\bar{r}^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sin \alpha},$$

где \bar{r} — «среднее» расстояние от электрона до площадки, которое с учетом малости величин $d\alpha, d\beta$ вычисляется по формуле $\bar{r} = r_2 / (\cos \alpha \cos \beta)$. В итоге для элементарной силы имеем

$$dF = q_e q_0 \frac{r_1}{r_2} \frac{d\alpha d\beta}{\sin \alpha} = \frac{q_e q_0}{\cos \alpha} d\alpha d\beta,$$

а для ее вертикальной составляющей

$$dF_{\perp} = dF \cos \beta \cos \alpha = q_e q_0 \cos \beta d\alpha d\beta.$$

Проинтегрировав выражение для F_{\perp} по β от $\beta = 0$ до $\beta = \pi/2$, найдем силу притяжения электрона к части элементарной «полоски», расположенной в квадранте $r_1 > 0, r_3 > 0$:

$$dF_{\alpha}^{+} = q_e q_0 d\alpha.$$

Просуммировав dF^+_α по α от $\alpha = 0$ до $\alpha = \pi/2$, т. е. по всем полоскам квадранта $r_1 > 0, r_3 > 0$, определим силу притяжения, индуцируемую зарядами, расположенными в этом квадранте:

$$dF^+ = \frac{\pi}{2} q_e q_0.$$

Учитывая действие всех четырех квадрантов плоскости нижней обкладки и проводя аналогичные рассуждения для верхней обкладки, получим результирующую силу притяжения (отталкивания) электрона ко всем зарядам конденсатора

$$F = 4\pi q_e q_0. \quad (2)$$

Сила F направлена вдоль оси r_2 к нижней обкладке (составляющие F по осям r_1, r_3 , очевидно, равны нулю в силу симметрии — чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть действие заряда, находящегося на площадке, расположенной в квадранте $r_1 < 0, r_3 < 0$ и симметричной площадке ds).

Поскольку сила F не зависит от r_2 , а по горизонтальной оси частица движется с постоянной скоростью v , то приходим к ситуации предыдущего пункта — применив второй закон Ньютона, легко получить формулы, аналогичные (1), описывающие движение электрона по параболической траектории и дающие возможность вычислить все ее параметры. Однако в отличие от случая с подложкой прямое применение фундаментального закона Кулона для получения модели движения электрона оказывается невозможным. Потребовалось, опираясь на фундаментальный закон, сначала описать элементарный акт взаимодействия зарядов, и уж затем, просуммировав все эти акты, удалось найти результирующую силу.

Подобная ситуация и последовательность действий весьма типичны при построении моделей, так как многие фундаментальные законы устанавливают взаимоотношения как раз между элементарными частями исходного объекта. Это, разумеется, справедливо не только для электрических сил, но, например, и для сил тяготения.

3. Колебания колец Сатурна.

Построим модель движения точечной массы M_0 в поле сил тяготения, создаваемом материальным кольцом с радиусом R_0 и линейной плотностью ρ_0 . Кольцо считается бесконечно тонким, движение происходит вдоль оси кольца (рис. 10). Данная схема может рассмат-

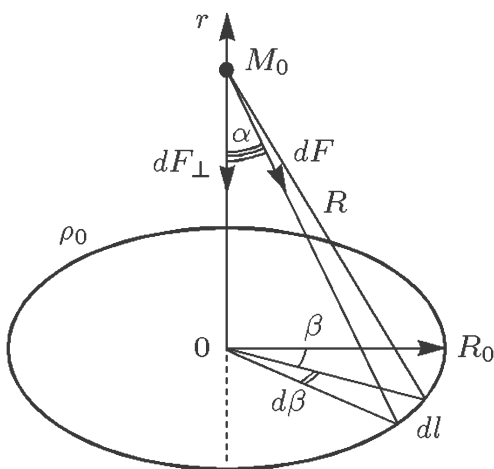


Рис. 10

риваться как идеализация процесса колебаний колец Сатурна. Тем не менее, несмотря на существенные упрощения, непосредственное использование закона всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{m_0 m_1}{r^2},$$

где F — сила притяжения двух тел, имеющих массы m_0 и m_1 , r — расстояние между ними, γ — постоянная тяготения, не может дать окончательной модели движения колец Сатурна, так как массы m_0 , m_1 должны быть точечными.

Поэтому вычислим сначала силу притяжения между точечной массой M_0 и массой dm , содержащейся в малом элементе кольца dl , которую уже можно считать точечной:

$$dF = \gamma \frac{M_0 dm}{R^2}.$$

Здесь R , r — соответственно расстояние от массы M_0 до кольца и до центра кольца. Очевидно, что при $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ (для $\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi$ выкладки аналогичны)

$$\frac{R_0}{R} = \sin \alpha = \frac{R_0}{\sqrt{r^2 + R_0^2}}, \quad \frac{r}{R} = -\cos \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + R_0^2}}.$$

Поскольку $dm = \rho_0 dl = \rho_0 R_0 d\beta = -\rho_0 r \operatorname{tg} \alpha d\beta$, то

$$dF = -\gamma \frac{M_0 \rho_0}{R^2} r \operatorname{tg} \alpha d\beta = -\gamma \frac{M_0 \rho_0}{r} \sin \alpha \cos \alpha d\beta.$$

Найдем проекцию силы dF на ось r (именно эта проекция определяет интересующее нас движение):

$$dF_{\perp} = dF \cos \alpha = -\gamma \frac{M_0 \rho_0}{r} \sin \alpha \cos^2 \alpha d\beta.$$

Просуммировав теперь силы тяготения, создаваемые всеми элементами кольца, т. е. взяв интеграл от dF_{\perp} по β от $\beta = 0$ до $\beta = 2\pi$, найдем результирующую силу:

$$F = -2\pi\gamma \frac{M_0 \rho_0}{r} \sin \alpha \cos^2 \alpha = -\gamma M_0 M_1 \frac{r}{(r^2 + R_0^2)^{3/2}}, \quad (3)$$

где $M_1 = 2\pi R_0 \rho_0$ — полная масса кольца. Как и в предыдущем пункте, горизонтальная проекция результирующей силы равна нулю из-за симметричного расположения кольца относительно массы M_0 .

Сила тяготения (3) существенно отличается от выражения, даваемого законом для точечных масс, переходя в него лишь при $r \gg R_0$, когда кольцо можно уподобить точечной массе благодаря большому, в сравнении с размерами кольца, расстоянию между тяготеющими телами. Если же $r \ll R_0$, то

$$F = -\gamma \frac{M_0 M_1}{R_0^3} r,$$

и сила притяжения, в противоположность случаю точечных масс, убывает с уменьшением расстояния между объектами (еще один предельный переход рассмотрен в упр. 3).

Применив к массе M_0 второй закон Ньютона, получим уравнение ее движения вдоль оси r :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\gamma M_1 \frac{r}{(r^2 + R_0^2)^{3/2}},$$

которое, в отличие от п. 1 и п. 2, существенно нелинейно и становится линейным лишь при $r \ll R_0$:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\gamma \frac{M_1}{R_0^3} r. \quad (4)$$

4. Движение шарика, присоединенного к пружине. В получении моделей пп. 1–3 главную роль играли фундаментальные законы, определявшие происхождение и величину сил, действующих на объект, а второй закон Ньютона был как бы вспомогательным и применялся

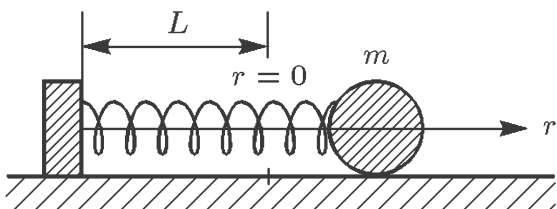


Рис. 11

на последней стадии построения модели. Конечно же, такое деление чисто условно. Ведь если речь идет о задачах динамики, то можно использовать и другую схему — сначала связать с помощью закона Ньютона проекции ускорения тела с проекциями действующих на него сил, а затем,

исходя из тех или иных соображений, вычислить эти силы как функции координат, получив замкнутую модель. Продемонстрируем этот подход на примере модели движения шарика, присоединенного к пружине, с жестко закрепленным концом (рис. 11).

Пусть r — координата шарика вдоль оси пружины, лежащей на горизонтальной плоскости, и направление движения шарика совпадает с ее осью. Тогда по второму закону динамики

$$F = ma = m \frac{d^2 r}{dt^2},$$

где m — масса шарика, a — его ускорение. Будем считать плоскость идеально гладкой (т. е. движение происходит без трения), пренебрежем также сопротивлением воздуха и примем во внимание то, что вес шарика уравновешивается реакцией плоскости. Единственная сила, действующая на шарик в направлении оси r , очевидно, сила упругости пружины. Определим ее, используя закон Гука, гласящий, что для растяжения (сжатия) пружины необходимо приложить силу

$$F = -kr,$$

где коэффициент $k > 0$ характеризует упругие свойства пружины, а r — величину ее растяжения или сжатия относительно нейтрального, ненагруженного положения $r = 0$. Уравнение движения шарика принимает вид (уравнение элементарного осциллятора)

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr, \quad t > 0. \quad (5)$$

Оно описывает его гармонические колебания и имеет общее решение

$$r = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (6)$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ — собственная частота колебаний системы «пружина—шарик». Значения A и B легко определяются из начального состояния объекта, т. е. через величины $r(t=0) = r_0$ и $v(t=0) = v_0$ ($v(t)$ — скорость шарика), причем $r(t) \equiv 0$ при $r_0 = v_0 = 0$. Заметим, что уравнение (4) с точностью до обозначений совпадает с (5), поэтому в п. 3 речь также шла о процессе колебаний, но применительно к системе «Сатурн—кольцо».

Подходы, с помощью которых строились модели данного параграфа, не должны, разумеется, противоречить другим фундаментальным законам природы. Соответствующая проверка непротиворечивости (если она возможна) весьма полезна для установления правильности моделей. Поясним это, используя для вывода уравнения (5) не закон Ньютона, а закон сохранения энергии. Поскольку точка крепления пружины неподвижна, то стенка не совершает работу над системой «пружина—шарик» (и наоборот), и ее полная механическая энергия E остается постоянной. Вычислим ее. Кинетическая энергия определяется движением шарика (пружина считается невесомой):

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(dr/dt)^2}{2}.$$

Потенциальная энергия системы «содержится» в пружине, ее нетрудно найти, определив работу, необходимую для растяжения (сжатия) пружины на величину r :

$$E_{\text{п}} = - \int_0^r F dr' = \int_0^r kr' dr' = k \frac{r^2}{2}.$$

Для неизменной со временем величины $E = E_{\text{к}} + E_{\text{п}}$ (интеграла энергии) получаем

$$E = \frac{m(dr/dt)^2}{2} + \frac{kr^2}{2}.$$

Так как $dE/dt \equiv 0$, то, продифференцировав интеграл энергии по t , приходим к выражению

$$m \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} + k \frac{dr}{dt} r = \frac{dr}{dt} \left(m \frac{d^2r}{dt^2} + kr \right) = 0,$$

т. е. к уравнению (5), проверив тем самым правильность его получения. Подобную процедуру нетрудно провести и для примеров пп. 1–3.

5. Заключение.

1. Даже в простейших ситуациях для построения модели может потребоваться использование не одного, а нескольких фундаментальных законов.

2. Прямое формальное применение фундаментальных законов к объекту, рассматриваемому как целое, не всегда возможно (пп. 2, 3). В этих случаях требуется просуммировать элементарные акты взаимодействия между его частями, принимая во внимание свойства объекта (например, его геометрию).

3. Одними и теми же моделями могут описываться совершенно разные по своей природе объекты, подчиняющиеся разным фундаментальным законам, и, наоборот, данному закону могут отвечать принципиально разные модели (например, линейные и нелинейные; см. п. 3).

4. Необходимо использовать все возможности для проверки правильности построения модели (предельные переходы — пп. 2, 3, другие фундаментальные законы — п. 4 и т. д.).

У П Р А Ж Н Е Н И Я

1. В задаче о всплытии подводной лодки учитывается сопротивление воды. Принимая силу сопротивления равной $F_1 = -k_0 u$, где $k_0 > 0$ — коэффициент, зависящий от свойств воды и формы подлодки, u — вертикальная скорость лодки, найдите максимальную глубину H , при всплытии с которой силой F_1 можно пренебречь в любой момент времени $t \leq t_k$ (должно выполняться требование $F_1 \ll F - P$).

2. Повторяя рассуждения п. 2, найдите силу притяжения электрона к обкладкам конденсатора, имеющим конечные размеры R_1, R_3 . Убедитесь в том, что при $R_1 \rightarrow \infty, R_3 \rightarrow \infty$ полученное выражение переходит в формулу (2).

3. В задаче п. 3 введите толщину кольца d , найдите силу F и убедитесь, что полученное выражение при $d \rightarrow 0$ совпадает с формулой (3).

4. Пусть расстояние между точкой нейтрального положения пружины $r = 0$ и стенкой, к которой она крепится, равно L (см. рис. 11). Найдите, пользуясь формулой (6), условия на величины r_0, v_0 , при выполнении которых шарик не может удариться о стенку (в противном случае модель (5) неверна, так как при соударении со стенкой шарик испытывает с ее стороны действие некоторой силы, не учитываемой в уравнении (5)).

§ 3. Вариационные принципы и математические модели

Дадим упрощенную формулировку вариационного принципа Гамильтона для механической системы. На его основе выведем уравнения движения шарика на пружине и маятника в поле сил тяжести. Сопоставим результаты получения моделей из фундаментальных законов и из вариационного принципа.

1. Общая схема принципа Гамильтона. Пусть имеется механическая система, формального и строгого определения которой пока давать не будем, имея в виду, однако, что все взаимодействия между элементами такой системы определяются законами механики (один из простейших примеров — рассмотренная в п. 4 § 2 система «шарик—пружина»). Введем понятие *обобщенных координат* $Q(t)$, полностью определяющих положение механической системы в пространстве. Величина $Q(t)$ может быть декартовой координатой (например, координата r в системе «шарик—пружина»), радиусом-вектором, угловой координатой, набором координат материальных точек, составляющих

систему, и т. д. Величину dQ/dt естественно назвать *обобщенной скоростью* механической системы в момент времени t . Набор величин $Q(t)$ и dQ/dt определяет состояние механической системы во все моменты времени.

Для описания механической системы вводится *функция Лагранжа*, построение которой — отдельный вопрос, более подробно рассматриваемый в гл. III. В простейших случаях функция Лагранжа имеет ясный смысл и записывается в виде

$$L(Q, dQ/dt) = E_k - E_{\text{п}}, \quad (1)$$

где E_k , $E_{\text{п}}$ — кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно. Для целей данного параграфа нет необходимости давать общее определение величин E_k , $E_{\text{п}}$, поскольку в рассматриваемых примерах они вычисляются очевидным образом.

Введем далее величину $S[Q]$, называемую *действием*:

$$S[Q] = \int_{t_1}^{t_2} L \left(Q, \frac{dQ}{dt} \right) dt. \quad (2)$$

Интеграл (2), очевидно, является функционалом от обобщенной координаты $Q(t)$, т. е. функции $Q(t)$, заданной на отрезке $[t_1, t_2]$, он ставит в соответствие некоторое число S (действие).

Принцип Гамильтона для механической системы гласит: если система движется по законам механики, то $Q(t)$ — стационарная функция для $S[Q]$, или

$$\frac{d}{d\varepsilon} S[Q + \varepsilon\varphi]_{\varepsilon=0} = 0. \quad (3)$$

Фигурирующая в *принципе наименьшего действия* (3) функция $\varphi(t)$ — некоторая пробная функция, обращающаяся в нуль в моменты t_1, t_2 и удовлетворяющая тому условию, что $Q(t) + \varepsilon\varphi(t)$ — возможная координата данной системы (в остальном $\varphi(t)$ произвольна).

Смысл принципа (3) в том, что из всех априори мыслимых (допускаемых) траекторий (движений) системы между моментами t_1, t_2 выбирается (реализуется) движение, доставляющее минимум функционалу действия (отсюда происходит и название принципа). Функция $\varepsilon\varphi(t)$ называется *вариацией* величины $Q(t)$.

Итак, схема применения принципа Гамильтона (3) для построения моделей механических систем состоит в следующем: определяются обобщенные координаты $Q(t)$ и обобщенные скорости dQ/dt системы, строятся функция Лагранжа $L(Q, dQ/dt)$ и функционал действия $S[Q]$, минимизация которого на вариациях $\varepsilon\varphi(t)$ координаты $Q(t)$ и дает искомую модель.

2. Третий способ получения модели системы «шарик—пружина». Воспользуемся принципом Гамильтона для построения модели движения шарика, соединенного с пружиной (п. 4 § 2). В качестве обобщенной координаты системы естественно выбрать обычную эйлерову координату шарика $r(t)$. Тогда обобщенная скорость