

Московский авиационный институт
(государственный ТѢХнический университет)

Факультет прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Методичка по курсу «Уравнения математической физики»

«Методы исследования и решения систем уравнений
гиперболического типа»

Студенты: И. К. Никитин
Преподаватель: Э. И. Иванов

Москва, 2009

Содержание

1	Гиперболические системы квазилинейных уравнений	3
1	Характеристики	3
2	Системы	3
3	Существование и единственность решений	5
4	Классификация	6
5	Инварианты Римана	7
6	Одномерный случай	9
2	Одномерная нестационарная газовая динамика	10
3	Классический метод характеристик	13
1	Процедура нахождения решений	14
4	Сеточно-характеристический метод	16
1	Процедура нахождения решений	17
5	Постановка краевых условий	19
1	Граничные условия	19
2	КФЛ	20
2.1	Области зависимости	20
2.2	Расстояние и время	21
2.3	Граничные условия	21
6	Метод Годунова	23
1	Теория	23
2	Разностная сетка	25
7	Газодинамические разрывы	28
1	Условия	28
1.1	Тангенциальные разрывы	29
1.2	Ударные волны	30
2	Скорость распространения разрыва	30
3	Соотношения на разрыве	31
8	Соотношения на ударной волне	32

9	Веер волн разряжения	35
10	Задача Римана	37
1	Постановка	37
2	Случаи	39
11	Параметры метода Годунова	41
1	Шаг сетки	41
2	Постановка граничных условий	41
3	Типы граничных процедур	42

1 Характеристический анализ гиперболических систем квазилинейных уравнений с двумя независимыми переменными. Запись линейной системы в инвариантах

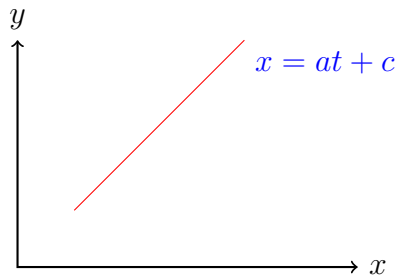
Уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \cdot \frac{\partial U}{\partial x} = 0, a > 0$$

— гиперболическое.

1 Характеристики

$\frac{dx}{dt} = a$ — уравнение характеристик



2 Системы

Рассмотрим функции двух независимых переменных x и t

$$AU_t + BU_x = f$$

независимые функции:

1. $U = (U_1, \dots, U_n)^T$

2. $f = (f_1, \dots, f_n)^T$

Причем:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix};$$

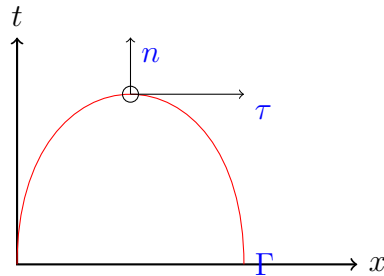
В нашем случае, $n = 2$. Элементы матрицы тоже могут быть функциями.

1. $a_{ij} = a_{ij}(x, t, U)$
2. $b_{ij} = b_{ij}(x, t, U)$
3. $f_i = f_i(x, t, U)$
4. $u_i = b_i(x, t)$

Такая система $AU_t + BU_x = f$ называется **квазилинейной**.

Другие варианты:

- Если $a_{ij} = a_{ij}(x, t)$ — система **линейная**.
- Если $a_{ij} = \text{const}$ — отдельного названия нет.



Сформулируем задачу в (x, t) . Пусть задана некоторая кривая Γ И на ней зададим точку.

$$\begin{cases} AU_t + BU_x = f \\ U_i|_{\Gamma} = U_{i0} \end{cases}$$

Продифференцируем вдоль Γ

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

Получим матричную систему:

$$\begin{cases} AU_t + BU_x = f \\ \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial t} dt = dU \end{cases}$$

Последнее можно решить методом Гаусса, но мы поступим, проще, по-детски. Принимая во внимание, что $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt} - \frac{dx}{dt} \frac{\partial U}{\partial x}$, получим:

$$A \frac{dU}{dt} - A \frac{dx}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial x} = f$$

Тут следует обратить внимание на ∂ и d

$$\frac{\partial U}{\partial x} \left(B - A \frac{dx}{dt} \right) = f - A \frac{\partial U}{\partial t}$$

Тут все известно кроме, $\frac{\partial U}{\partial x}$. В данном случае — система алгебраических уравнений. И в конце получим просто систему уравнений разрешенных относительно производной, типа $\frac{\partial U}{\partial x} = g(x, t, \bar{U})$

3 Существование и единственность решений

- Если

$$\det \left(B - A \frac{dx}{dt} \right) \neq 0$$

значит, существует единственное решение (по правилу Крамера)

- + существует единственный набор $\left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x} \right\}$
- + существует единственный набор $\left\{ \frac{\partial u_i}{\partial t} \right\}$, соответствующий первому

На Γ существует не только решение но и производные, легко найти производную по касательной и производную по нормали.

- + существует единственный набор $\left\{ \frac{\partial u_i}{\partial n} \right\}$
- + существует единственный набор $\left\{ \frac{\partial u_i}{\partial \tau} \right\}$, соответствующий первому

Вся информация от Γ лежит в $\det \left(B - A \frac{dx}{dt} \right)$. На Γ остается составить задачу Коши и решить ее.

- Если

$$\det \left(B - A \frac{dx}{dt} \right) = 0$$

Тут два случая:

- + решений не существует
- + *существует* бесконечное число решений. Для того составим расширенную систему

$$\det \left(B - A \frac{dx}{dt} \middle| f - A \frac{\partial U}{\partial t} \right) = 0$$

И так, из

$$\det \left(B - A \frac{dx}{dt} \right) = 0$$

раскрыв определитель, \Rightarrow многочлен: $\left(\frac{dx}{dt}\right)^n + \dots + C = 0$, найдем $\left(\frac{dx}{dt}\right)_i$ и получим **уравнения характеристик**

$$\begin{cases} \left(\frac{dx}{dt}\right)_1 = \lambda_1(x, t, \bar{U}) \\ \vdots \\ \left(\frac{dx}{dt}\right)_n = \lambda_n(x, t, \bar{U}) \end{cases}$$

Т.е. \forall корня многочлена получается дифференциальное уравнение \forall по отдельности дифференциальное уравнение имеет кривую $x = x(t)$, которую можно получить из решения $\frac{dx}{dt} = \lambda(x, t, \bar{U})$. Если мы на такой кривой зададим начальное решение, то не получится составить задачу Коши. Т.е. в (x, t) есть кривые, на которых можно найти решения задачи Коши, есть те которые дают бесконечно много решений, а есть те, которые не дают ничего. Множество кривых которое мы нашли называется **характеристиками**.

Таким образом характеристики — такие линии, на которых невозможно корректно составить и решить задачу Коши. Перед решением системы надо проверить не является ли она характеристической.

Дальше еще интереснее:

У нас есть соотношение:

$$\det \left(B - A \frac{dx}{dt} \middle| f - A \frac{\partial U}{\partial t} \right) = 0$$

Любой столбец из левой части заменяем на столбец правой части. Решаем полученную систему. Из решения найдем соотношения между $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{du}{dt}$. Так, мы решаем систему и получим характеристики и значения функций на этих характеристиках. Соотношения на характеристиках:

$$\lambda_i = \alpha \cdot \frac{d\bar{U}}{dt}$$

4 Классификация

И так у нас есть система уравнений

$$AU_t + BU_x = f; \quad \Rightarrow \text{система характеристик} \quad \Rightarrow \text{решение}$$

- Если $\det(B - A \frac{dx}{dt}|_{n \times n}) = 0$ имеет n различных действительных решений (их всего n), то система строго гиперболическая. $B - A \frac{dx}{dt}|_{n \times n}$ имеет n различных собственных значений.
- Если корни $\det(B - A \frac{dx}{dt}|_{n \times n}) = 0$ действительные и среди них есть кратные, то:
 - + если этим корням соответствует n ЛНЗ собственных векторов — система гиперболическая.
 - + если этим корням соответствует меньше n ЛНЗ собственных векторов — система параболическая.
- Если $B - A \frac{dx}{dt}|_{n \times n}$ имеет n комплексно-сопряженные собственные значения, то система эллиптическая.

В этом разделе мы будем рассматривать только строго гиперболические системы.

5 Инварианты Римана

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} AU_t + BU_x = f \\ U_i|_{\Gamma} = U_{i0} \end{cases}$$

Если A — невырожденная, систему можно привести к виду:

$$U_t + \frac{B}{A}U_x = \frac{f}{A}$$

Пусть:

$$P = \frac{B}{A}U_x; \quad \rho = \frac{f}{A}$$

Мы раньше исследовали $\det(B - A \frac{dx}{dt})$, т.к. A — невырожденная, то $\det(\frac{B}{A} - E \frac{dx}{dt})$ дает те же самые многочлены

Заметим, что у P есть левый и правый собственные вектора.

$$P\bar{r} = \lambda\bar{r}; \quad \bar{l}P = \bar{l}\lambda$$

Приведем нашу (строго гиперболическую) систему к диагональному виду.

$$\Lambda = \Omega^{-1}P\Omega$$

Существует такая невырожденная матрица Ω . Ищем ее численно (метод вращений)

$$\begin{cases} P\Omega &= \Omega\Lambda \\ \Omega^{-1}P &= \Lambda\Omega^{-1} \end{cases}$$

Рассмотрим 1 соотношение. Возьмем 1 столбец $\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ и умножим на матрицы

$$P \cdot \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

То же самое с остальными столбцами — все столбцы матрицы Ω правые собственные вектора. Аналогично — все строки матрицы Ω левые собственные вектора.

$$\Omega^{-1} = \Omega_l$$

$$\Omega = \Omega_r$$

Теперь возьмем исходную систему $\frac{\partial U}{\partial t} + P\frac{\partial U}{\partial x} = \rho$ и умножим на l_i :

$$l_i \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial t} + P\frac{\partial U}{\partial x} \right) = l_i \rho; \quad i = 1 \dots n$$

$$l_i \frac{\partial U}{\partial t} + l_i P \frac{\partial U}{\partial x} = l_i \rho; \quad i = 1 \dots n$$

$$l_i \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i l_i \frac{\partial U}{\partial x} = l_i \rho; \quad i = 1 \dots n$$

Получим:

$$l_i \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial x} \right) = l_i \rho; \quad i = 1 \dots n$$

где

- $\frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial U}{\partial x}$ — производная по направлению

- $\psi_i = l_i \rho_i$
- $\lambda_i = \left(\frac{dx}{dt}\right)_i$ — характеристическое уравнение

Учтем $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{dU}{dt} - \frac{dx}{dt} \frac{\partial U}{\partial x}$, \Rightarrow

$$l_i \left(\frac{dU}{dt} \right) = \psi_i$$

$$\frac{d(l_i U)}{dt} = \psi_i + U \frac{dl_i}{dt} = \varphi_i; \quad l_i \neq const$$

Это и есть **инвариант Римана**.

Мы перешли к новым переменным и получили характеристическое соотношение.

$$\frac{dw_i}{dt} = \varphi_i; \quad w_i = l_i \cdot U \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = \varphi_i;$$

6 Одномерный случай

$$A \frac{\partial U}{\partial t} + B \frac{\partial U}{\partial x} = C, \quad A, B, C = const; A \neq 0;$$

U — не вектор, а просто функция.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{B}{A} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{C}{A}$$

Рассмотрим:

$$\frac{B}{A} = \frac{dx}{dt}; \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{C}{A}; \quad \Rightarrow$$

Получим уравнение вдоль характеристик:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{C}{A}$$

Это постоянное значение:

$$C = 0 \Rightarrow dU = 0 \Rightarrow U = const$$

2 Характеристический анализ системы уравнений, описывающей одномерную нестационарную газовую динамику

Все рассуждения далее в переменных Эйлера.

Все величины скаляры:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial U}{\partial x} = 0; \end{cases}$$

$$a = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}}; \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \text{ — коэффициент адиабаты}$$

Пусть $\bar{U} = \frac{\rho}{P}$, тогда наша система имеет вид

$$A \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + B \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} U & \rho & 0 \\ 0 & U & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho a^2 & U \end{pmatrix}$$

Тогда:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \begin{pmatrix} U & \rho & 0 \\ 0 & U & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho a^2 & U \end{pmatrix} \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = 0$$

Рассмотрим:

$$(B - A \frac{dx}{dt}) = \begin{pmatrix} U - \frac{dx}{dt} & \rho & 1 \\ 0 & U - \frac{dx}{dt} & 0 \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho a^2 & U - \frac{dx}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U - \lambda & \rho & 1 \\ 0 & U - \lambda & 0 \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho a^2 & U - \lambda \end{pmatrix}$$

Найдем уравнения характеристик:

$$\det(B - \lambda A) = 0$$

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a \\ \lambda_2 &= U - a, \quad \text{где } U \text{ — скорость, неизвестная величина} \\ \lambda_3 &= U + a\end{aligned}$$

Составим расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} U - \lambda & \rho & 1 & -\frac{d\rho}{dt} \\ 0 & U - \lambda & 0\frac{1}{\rho} & -\frac{dU}{dt} \\ 0 & \rho a^2 & U - \lambda & -\frac{dP}{dt} \end{array} \right)$$

Получим соотношения на характеристиках:

- Для λ_2 и λ_3

$$\det \begin{pmatrix} U - \lambda & \rho & -\frac{d\rho}{dt} \\ 0 & U - \lambda & -\frac{dU}{dt} \\ 0 & \rho a^2 & -\frac{dP}{dt} \end{pmatrix} = 0$$

- Для λ_1

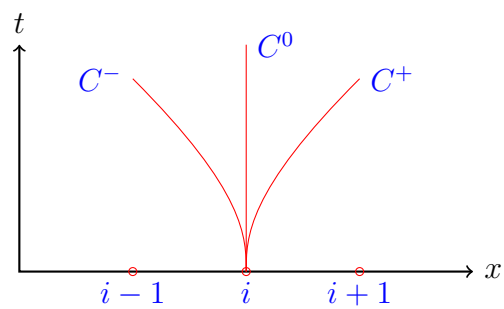
$$\det \begin{pmatrix} -\frac{d\rho}{dt} & \rho & 1 \\ -\frac{dU}{dt} & U - \lambda & 0\frac{1}{\rho} \\ -\frac{dP}{dt} & \rho a^2 & U - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Решая получим *характеристическую систему в квадратурах*

$$\frac{dx}{dt} = U \Rightarrow dP - a^2 d\rho = 0$$

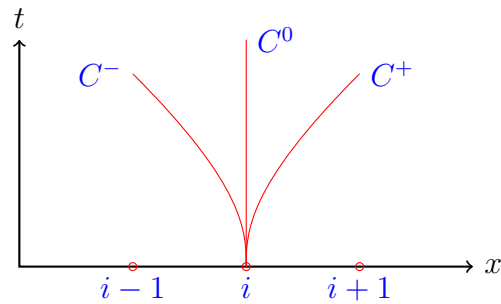
$$\frac{dx}{dt} = U + a \Rightarrow dP - \rho a dU = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = U - a \Rightarrow dP + \rho a dU = 0$$



$$\begin{cases} U(x, 0) = U_0(x); \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x); \\ P(x, 0) = P_0(x); \end{cases}$$

3 Классический метод характеристик для решения одномерных нестационарных уравнений газовой динамики

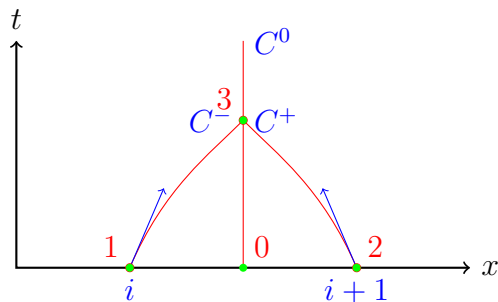


$$\begin{cases} C^+ : \frac{dx}{dt} = U + a \\ C^- : \frac{dx}{dt} = U - a \\ C^0 : \frac{dx}{dt} = U \end{cases}$$

a — скорость среды.

Что делаем:

- Берем 2 точки и проводим через них характеристики.
- Если мы сможем найти какую-то точку — найдем давление и скорость
- А если через эту точку проходит C^0 Мы можем найти плотность



Нам известны параметры в точках 0, 1, 2.

1 Процедура нахождения решений

1. Аппроксимация $u \pm a = \frac{dx}{dt}$

$$\begin{cases} x_3^{(0)} - x_1 &= (U + a)_1 \cdot (t_3^{(0)} - t_1) \\ x_3^{(0)} - x_2 &= (U - a)_2 \cdot (t_3^{(0)} - t_2) \end{cases} ; \quad \Rightarrow x_3^{(0)}, t_3^{(0)}$$

2. Запишем соотношения вдоль характеристик

$$\begin{cases} P_3^{(0)} - P_1 + (\rho a)_1 (U_3^{(0)} - U_1) &= 0 \\ P_3^{(0)} - P_2 + (\rho a)_2 (U_3^{(0)} - U_2) &= 0 \end{cases} ; \quad \Rightarrow U_3^{(0)}, P_3^{(0)}$$

3. $x_3^{(0)} - x_0^{(0)} = U_3^{(0)} \cdot (t_3^{(0)} - t_0^{(0)}); \quad \Rightarrow x_0^{(0)}$

4. Интерполяцией по узлам $\dots j-1, j, j+1, \dots$ находим, $P_0^{(0)}, \rho_0^{(0)}, U_0^{(0)}$ в точке $x_0^{(0)}$

5. $P_3^{(0)} - P_0^{(0)} - \gamma \frac{P_0^{(0)}}{\rho_0^{(0)}} \cdot (\rho_3^{(0)} - \rho_0^{(0)}); \quad \Rightarrow \rho_3^{(0)}$, где

$\gamma \frac{P_0^{(0)}}{\rho_0^{(0)}} = a^2$ В 1 шаге мы кривые заменили касательными. Теперь мы знаем все для касательных и можем уточнить кривизну.

- 6.

$$\begin{cases} x_3^{(1)} - x_1 &= \frac{((U+a)_1 + (U+a)_3)^{(0)}}{2} \cdot (t_3^{(1)} - t_1) \\ x_3^{(1)} - x_2 &= \frac{((U-a)_1 + (U-a)_3)^{(0)}}{2} \cdot (t_3^{(1)} - t_2) \end{cases} ; \quad \Rightarrow x_3^{(1)}, t_3^{(1)}$$

Пусть:

$$(\cdot)_{qt}^{(k+1)} = \frac{((\cdot)_q + (\cdot)_t)^{(k)}}{2}$$

- 7.

$$\begin{cases} P_3^{(1)} - P_1 + (\rho a)_{21} (U_3^{(1)} - U_1) &= 0 \\ P_3^{(1)} - P_2 + (\rho a)_{23} (U_3^{(1)} - U_2) &= 0 \end{cases} ; \quad \Rightarrow U_3^{(1)}, P_3^{(1)}$$

8. $x_3^{(1)} - x_0^{(1)} = U_3^{(1)} \cdot (t_3^{(1)} - t_0^{(1)}); \quad \Rightarrow x_0^{(1)}$

9. Интерполяцией по узлам $\dots j-1, j, j+1, \dots$ находим, $P_0^{(1)}, \rho_0^{(1)}, U_0^{(1)}$ в точке $x_0^{(1)}$

10. ... и так далее ...

Критерий выхода:

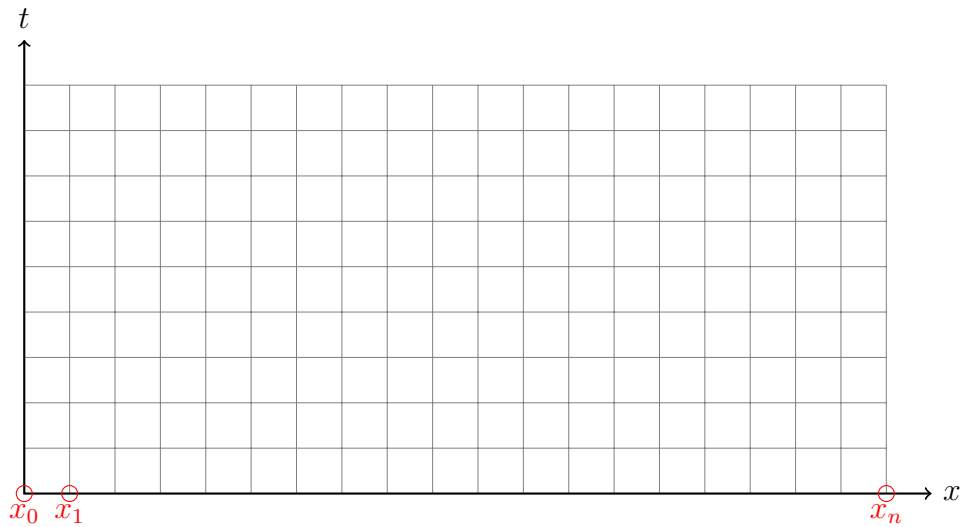
- $|\rho_3^k - \rho_3^{k-1}| < \varepsilon$
- $|P_3^k - P_3^{k-1}| < \varepsilon$
- $|U_3^k - U_3^{k-1}| < \varepsilon$

Тут:

- $\rho_3 = \rho_3^k$
- $P_3 = P_3^k$
- $U_3 = U_3^k$

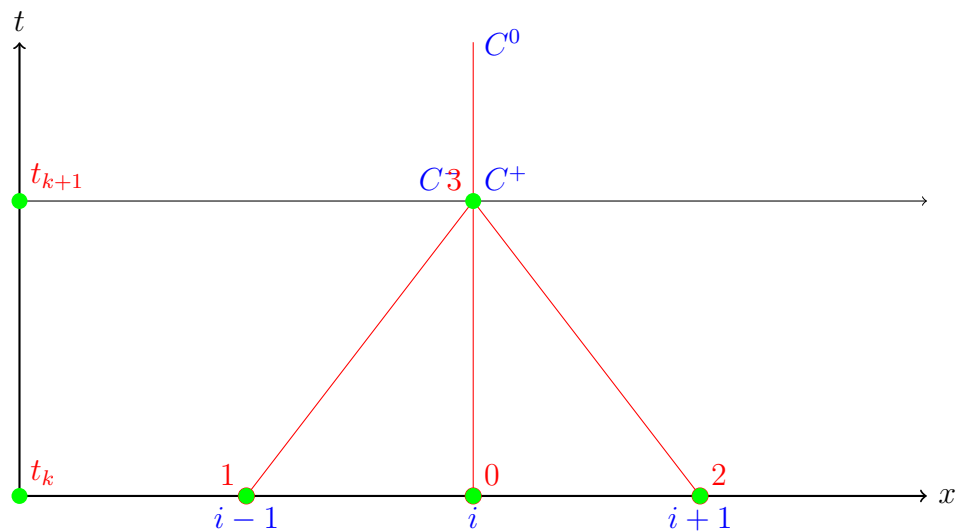
4 Сеточно-характеристический метод для решения одномерных нестационарных уравнений газовой динамики

Разностная сетка



Шаг по пространству $\delta x = x_{i+1} - x_i = \text{const}$

Шаг по времени *может быть постоянным или не постоянным, так как ситуация от слоя к слою может меняться*



1 Процедура нахождения решений

Пусть:

$$(\cdot)_{qt}^{(k+1)} = \frac{((\cdot)_q + (\cdot)_t)^{(k)}}{2}$$

1. Аппроксимация $U_3^{(0)} = U_j^k$

$$\begin{cases} P_3^{(0)} &= P_j^k \\ \rho_3^{(0)} &= \rho_j^k \end{cases} ; \quad \Rightarrow a_3$$

- 2.

$$\begin{cases} x_1^{(0)} &= x_3 - (u + a)_{13}\Delta t \\ x_2^{(0)} &= x_3 - (u - a)_{23}\Delta t \end{cases} ; \quad \Rightarrow a_3$$

3. Интерполяция по старому слою $t = t^k$. Определим неизвестные в точках 1 и 2.

$$P_1^{(0)} \quad \rho_1^{(0)} \quad U_1^{(0)}$$

$$P_2^{(0)} \quad \rho_2^{(0)} \quad U_2^{(0)}$$

4. $x_0^{(0)} = x_3 + U_{03}\Delta t$

5. Используя $x_0^{(0)}$, определим P_0^0, ρ_0^0, U_0^0

6. Найдём $U_3^{(1)}$ и $P_3^{(1)}$, решив систему:

$$\begin{aligned} P_3^{(1)} - P_1^{(0)} + (\rho a)_{13}^{(0)}(U_3^{(1)} - U_1^{(0)}) &= 0 \\ P_3^{(1)} - P_2^{(0)} + (\rho a)_{23}^{(0)}(U_3^{(1)} - U_2^{(0)}) &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$U_3^{(1)} = \frac{P_2^{(0)} - P_1^{(0)} + (\rho a)_{13}^{(0)}U_1^{(0)} + (\rho a)_{23}^{(0)}U_2^{(0)}}{(\rho a)_{13}^{(0)} + (\rho a)_{23}^{(0)}}$$

$$P_3^{(1)} = \frac{-(\rho a)_{13}^{(0)}(\rho a)_{23}^{(0)}(U_2^{(0)} - U_1^{(0)}) + (\rho a)_{13}^{(0)}P_1^{(0)} + (\rho a)_{23}^{(0)}P_2^{(0)}}{(\rho a)_{13}^{(0)} + (\rho a)_{23}^{(0)}}$$

7. Аппроксимируем вдоль C^0

$$P_3^{(1)} - P_3^{(0)} - (a^2)_{03}^{(0)}(\rho_3^{(1)} - \rho_0^{(0)}) = 0$$

$$\rho_3^{(1)} = \rho_0^{(0)} + \frac{P_3^{(1)} - P_0^{(0)}}{(a^2)_{03}^{(0)}}$$

Что мы в итоге получили ?

$$\begin{pmatrix} U_3^0 \\ \rho_3^0 \\ P_3^0 \end{pmatrix} ; \Rightarrow \begin{pmatrix} U_3^1 \\ \rho_3^1 \\ P_3^1 \end{pmatrix}$$

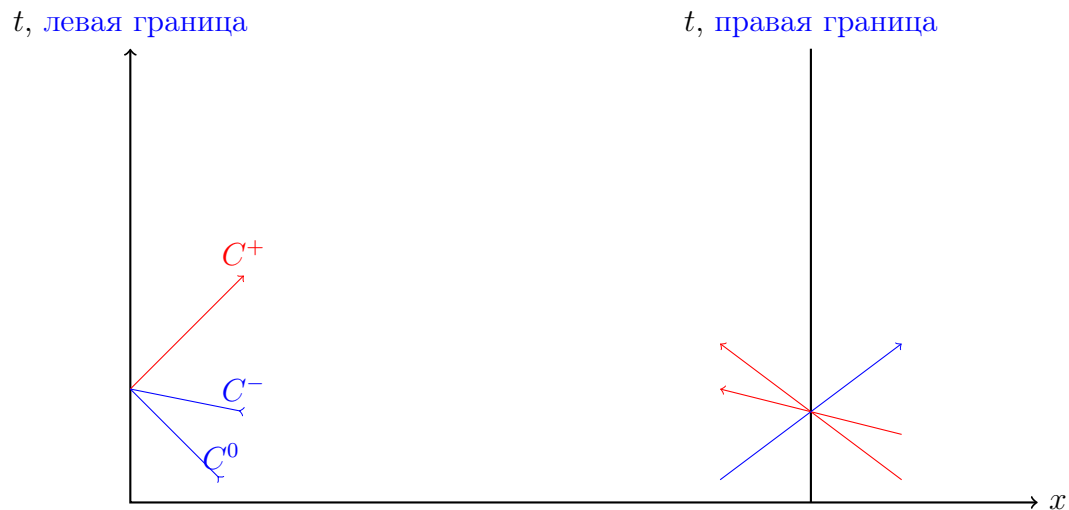
Далее повторяем всю процедуру, начиная со второго шага.

Критерий выхода:

$$\left| \begin{pmatrix} U_3^{l+1} \\ \rho_3^{l+1} \\ P_3^{l+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} U_3^l \\ \rho_3^l \\ P_3^l \end{pmatrix} \right| < \varepsilon$$

5 Постановка краевых условий в методе характеристик (2 независимых переменных)

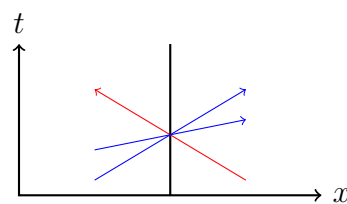
1 Определение количества дополнительных граничных условий



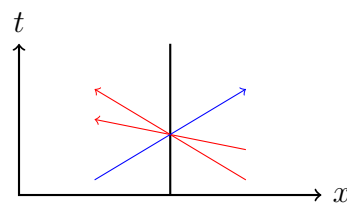
Количество краевых условий, которые надо задавать на границе — количество отходящих характеристик внутрь области.

Рассмотрим несколько примеров, учитывая особенности газовой динамики:

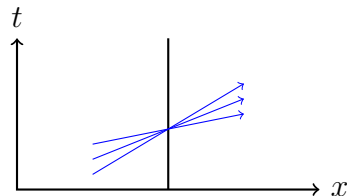
- Нужно задать 1 дополнительное краевое условие — **вытекающий дозвуковой поток**



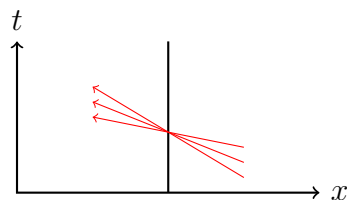
- 2 дополнительных краевых условия — **втекающий дозвуковой поток**



- 0 дополнительных краевых условий — **вытекающий сверхзвуковой поток**



- 3 дополнительных краевых условия — **втекающий сверхзвуковой поток**

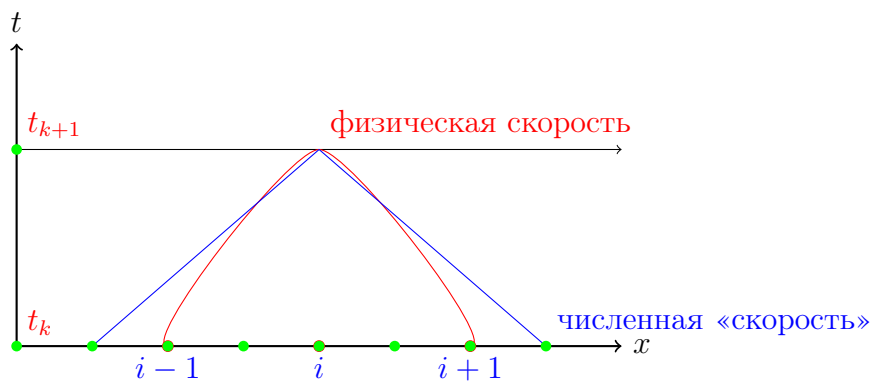


2 Краевые условия Куранта, Фридрихса, Леви

Существует много различных формулировок

2.1 Области зависимости

Явная численная схема (для гиперболических систем) устойчива, если область зависимости дифференциальной задачи лежит внутри области зависимости разностной задачи



2.2 Расстояние и время

Существует два различных понятия:

- Скорость реальных возмущений
- Скорость распространения информации между узлами разностной сетки (численные возмущения) — $\frac{\Delta x}{\Delta t}$

$|U| + a$ — максимальная скорость распространения реальных (физических) возмущений.

Критерий Куранта (теоретическая скорость выше физической):

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > |U| + a$$

Из этого можно получить:

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{|U| + a}$$

или:

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{\max(U + a, U - a)} \Rightarrow \text{для каждой точки} \Rightarrow \Delta t_j < \frac{\Delta x}{\max_j(U_j^k + a_j^k, U_j^k - a_j^k)}$$

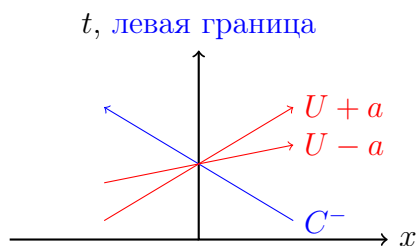
Последнее можем записать так (для всех точек):

$$\Delta t = C \min_i \Delta t_i, \text{ где } C — \text{число Куранта}$$

Обычно $C = 0.6$.

2.3 Граничные условия

Дозвуковой втекающий поток



$$U > 0; |U| < a$$

Зададим P_w и ρ_w — константы

$$P_3 = P_w; \quad \rho_3 = \rho_w;$$

А уже отсюда мы будем проводить аппроксимацию:

$$\begin{aligned} x_2^l &= x_3 - (U - a)_{23}^{(l)} \Delta t \\ 0 &= P_3 - P_2^{(l)} - (\rho a)_{23}^{(l)} (U_3^{l+1} - U_2^l) \end{aligned} \quad \Rightarrow U_3^{l+1}$$

6 Метод Годунова первого порядка для решения одномерных нестационарных уравнений газовой динамики

1 Теория

Система дифференциальных уравнений, описывающая течение газа, которое зависит от времени t и одной декартовой координаты x , имеет вид (дифференциальная форма):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho U}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial(P + \rho U^2)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial U(E + P)}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

В систему входят четыре искомые функции. Поэтому она должна быть дополнена еще одним уравнением. Как известно, среди термодинамических величин, описывающих состояние газа, только две могут быть выбраны в качестве независимых, остальные же можно вычислить при помощи так называемого *уравнения состояния*.

- E — полная энергия в единице объема. $E = \epsilon + \frac{\rho U^2}{2}$, где ϵ — внутренняя энергия единицы объема газа. Применим тут уравнение состояний. Уравнение (для идеального газа) имеет вид:

$$P \cdot V_M = R \cdot T$$

где

- + P — давление,
- + V_M — молярный объем,
- + T — абсолютная температура
- + R — универсальная газовая постоянная

Приведя его к виду: $P = P(\rho, T)$ получим **термический тип уравнения состояния** — свяжем давления и температуру. Приведя его к виду: $\epsilon = \psi(\rho, P)$ получим **калорический тип уравнения состояния** — свяжем внутреннюю энергию с другими параметрами. Последнее не сложно получить из:

$$P = (\gamma - 1)\rho\epsilon$$

+ ε — внутренняя энергия единицы массы газа

+ $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ — показатель адиабаты.

$$\epsilon = \frac{P}{\gamma - 1}$$

Таким образом:

$$E = \frac{P}{\gamma - 1} + \frac{\rho \cdot U^2}{2}$$

Используя внутреннюю энергию единицы массы газа ε : $E = \left(\varepsilon + \frac{U^2}{2}\right)\rho$, но после подстановки и раскрытия скобок, получим тоже самое, что и выше.

- ρ — плотность
- P — давление
- U — скорость

Исходную систему удобно записать в векторной форме:

- Вектор консервативных переменных

$$q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho U \\ E \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \rho V & \text{— масса} \\ \rho UV & \text{— импульс в единицу объема} \\ EV & \text{— полная энергия объема} \end{pmatrix}$$

- Вектор потоков

$$f = \begin{pmatrix} \rho U & \text{— поток масс} \\ P + \rho U^2 & \text{— поток импульса} \\ U(E + P) & \text{— поток энергии} \end{pmatrix}$$

Тогда система запишется в виде:

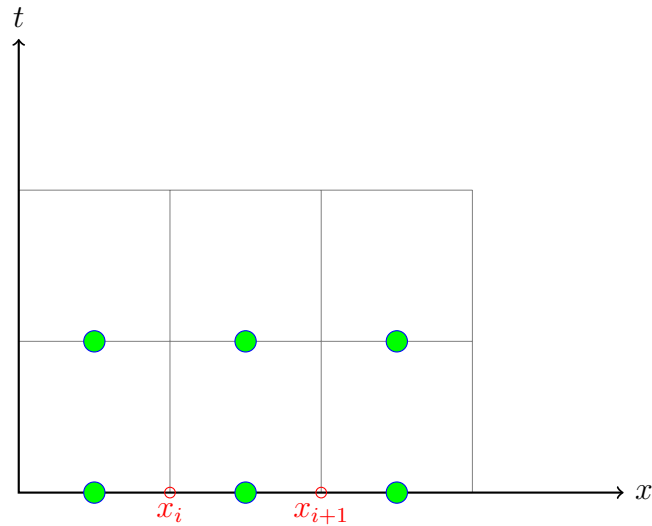
$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Это ничто иное как

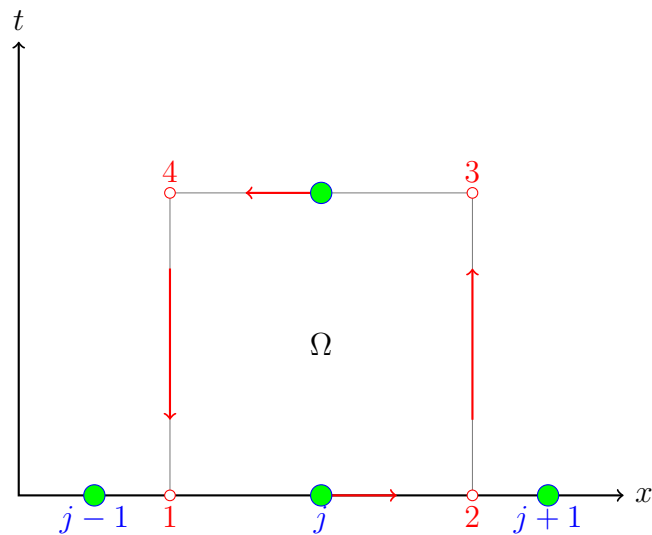
$$\div \begin{pmatrix} q \\ f \end{pmatrix}$$

2 Разностная сетка

Построим метод Годунова как метод конечных (контрольных) объемов.



Зеленые окружности — средние величины на интервале. В методе контрольных объемов мы имеем дело со средними значениями. В общем виде 1 конечный объем Ω выглядит:



l_{1234} — поверхность куба

Говорят, что в точки **1** и **2** имеют индексы $j - \frac{1}{2}$ и $j + \frac{1}{2}$ соответственно.

- Среднее давление на всем объеме

$$P_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} P(x, t_n) dx$$

- Средняя плотность на всем объеме

$$\rho_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \rho(x, t_n) dx$$

- Средняя скорость на всем объеме

$$U_j = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} U(x, t_n) dx$$

Возьмем и проинтегрируем объем по времени:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dt = 0$$

На что это похоже? Вспомним формулу Грина:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint_l P dx - Q dy$$

Тогда:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx dt = \oint_{l_{1234}} q dx - f dt = 0$$

Интегралы мы будем аппроксимировать по участкам **12**, **23**, **34**, **41**, предварительно выбрав направление обхода

$$\begin{aligned} & q_{12} \cdot (x_2 - x_1) - f_{12} \cdot (t_2 - t_1) + \\ & q_{23} \cdot (x_3 - x_2) - f_{23} \cdot (t_3 - t_2) + \\ & q_{34} \cdot (x_4 - x_3) - f_{34} \cdot (t_4 - t_3) + \\ & q_{41} \cdot (x_1 - x_4) - f_{41} \cdot (t_1 - t_4) = 0 \end{aligned} \Rightarrow q_{34} = q_{12} - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{23} - f_{41})$$

Учитывая, что график с конечным объемом Ω — изображение разностной схемы:

$$q_j^{n+1} = q_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}})$$

$f_{j\pm\frac{1}{2}}$ — получаются из решения задачи Римана

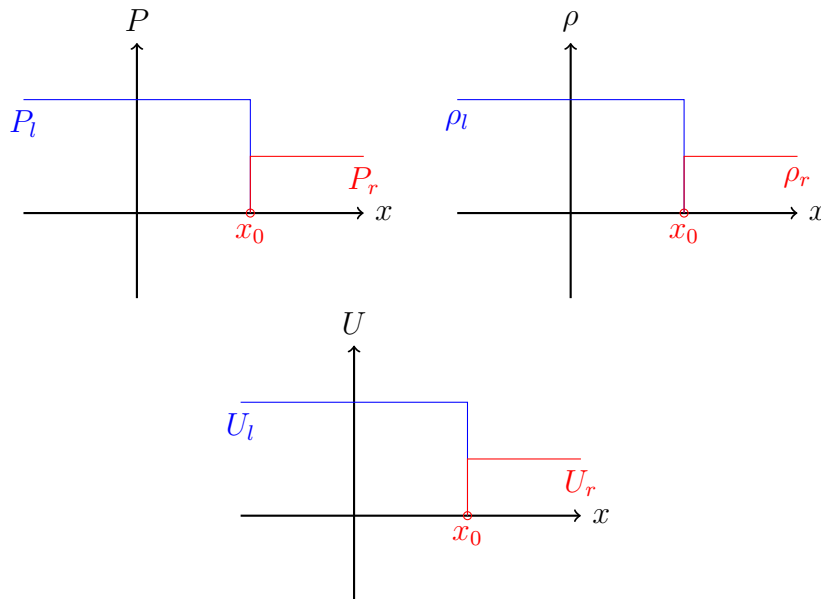
7 Газодинамические разрывы (случай двух независимых переменных)

Пусть имеется среда (газ), для которой термодинамические величины: давление P , плотность ρ , внутренняя энергия в единице объема ϵ — подчиняются уравнению состояния:

$$P = (\gamma - 1)\rho\epsilon$$

Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ для левого полупространства $x < x_0$ среда характеризуется значениями параметров P_l, ρ_l, U_l , а для правого полупространства $x > x_0$ — значениями P_r, ρ_r, U_r . Здесь U — компонента вектора скорости в направлении координаты x (другие ее компоненты равны нулю).

Например, если привести в соприкосновение две массы газа, сжатые до различных давлений, и убрать перегородку между ними, то поверхность их соприкосновения будет поверхностью разрыва в начальном распределении давления. Существенно отметить, что скачки на разрыве могут быть совершенно произвольными.



1 Условия

На поверхностях разрыва должны выполняться определенные соотношения (*ниже квадратными скобками обозначена разность величин по разные стороны поверхности*):

- На поверхности разрыва должен быть непрерывен поток вещества. Поток газа через элемент поверхности разрыва, отнесенный на единицу площади, должен быть одинаковым по величине по разные стороны от поверхности разрыва, то есть должно выполняться условие

$$[\rho u_x] = 0$$

Направление оси x выбрано нормальным к поверхности разрыва.

- Должен быть непрерывным поток энергии, т.е. должно выполняться условие

$$\left[\rho u_x \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) \right]$$

- Должен быть непрерывен поток импульса, должны быть равны силы, с которыми действуют друг на друга газы по обеим сторонам поверхности разрыва. Вектор нормали направлен по оси x , то непрерывность x -компоненты потока импульса приводит к условию

$$[p + \rho u_x^2] = 0$$

Непрерывность y и z -компонент дает

$$+ [\rho u_x u_y] = 0$$

$$+ [\rho u_x u_z] = 0$$

Уравнения выше представляют полную систему граничных условий на поверхности разрыва.

Существует 2 типа поверхности разрыва:

1.1 Тангенциальные разрывы

Через поверхность разрыва нет потока вещества

$$\begin{cases} \rho_1 u_{1x} = \rho_2 u_{2x} = 0 \\ \rho_1, \rho_2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow u_{1x} = u_{2x} \Rightarrow p_1 = p_2$$

Таким образом, на поверхности разрыва в этом случае непрерывны нормальная компонента скорости и давление газа. Тангенциальные скорости u_z , u_y и плотность могут испытывать произвольный скачок. Такие разрывы называются *тангенциальными*.

Контактные разрывы — частный случай тангенциальных разрывов. Скорость непрерывна. Плотность испытывает скачок, а с ней и другие термодинамические величины за исключением давления.

1.2 Ударные волны

Есть поток вещества, величины *отличны от нуля*.

Тогда из условий:

$$[\rho u_x] = 0; \quad [\rho u_x u_y] = 0; \quad [\rho u_x u_z] = 0$$

имеем:

$$[u_y] = 0 \quad [u_z] = 0$$

тангенциальная скорость непрерывна на поверхности разрыва. Плотность, давление, а с ними и другие термодинамические величины испытывают скачок, причем скачки этих величин связаны соотношениями — **условиями разрыва**.

Из

$$\begin{cases} \left[\rho u_x \left(\frac{u^2}{2} + \varepsilon \right) \right] &= 0; \\ [u_y] &= 0; \\ [u_z] &= 0 \end{cases}$$

получим:

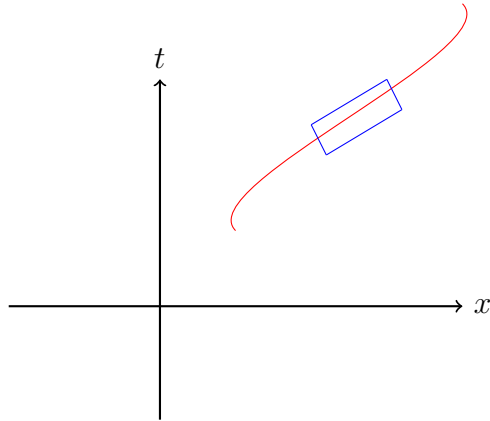
$$[\rho u_x] = 0; \quad \left[\frac{u_x^2}{2} + \varepsilon \right] = 0; \quad [p + \rho u_x^2] = 0$$

2 Скорость распространения разрыва

Для вывода соотношений на движущихся разрывах можно воспользоваться уравнениями

$$\begin{cases} \oint_{\partial\Omega} (\rho \, dx - \rho u \, dt) &= 0 \\ \oint_{\partial\Omega} (\rho u \, dx - (p + \rho u^2) \, dt) &= 0 \\ \oint_{\partial\Omega} (E \, dx - (p + E) \, dt) &= 0 \end{cases}$$

полученными с помощью метода Годунова.



Газодинамический разрыв в одномерном нестационарном случае геометрически представляет собой кривую в плоскости. Построим контрольный объем возле разрыва так чтобы две стороны контура, охватывающего этот объем, располагались параллельно разрыву по обеим сторонам разрыва, а две другие стороны были перпендикулярны разрыву. Записывая систему для данного контрольного объема, затем стягивая боковые стороны к нулю и пренебрегая величиной интеграла на этих сторонах, получим с учетом направления обхода контура и знаков приращений координат и вдоль сторон примыкающих к разрыву:

$$\int_{1-2} (q dx - f dt) - \int_{3-4} (q dx - f dt) = 0$$

Значит

$$\int_{1-2} (q \frac{dx}{dt} - f) - \int_{3-4} (q \frac{dx}{dt} - f) = 0$$

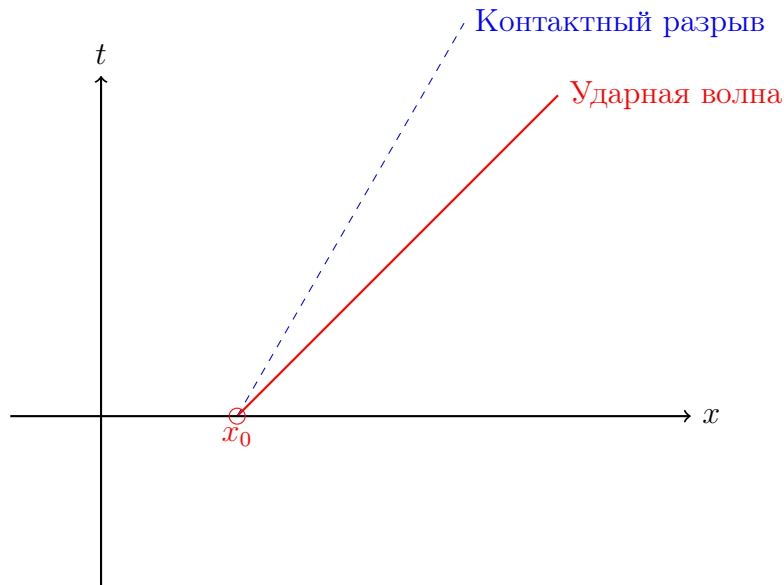
Величина $D = \frac{dx}{dt}$ — скорость распространения разрыва

3 Соотношения на разрыве

Переходя к аппроксимациям интегралов по методу прямоугольников и используя обозначения для скачков величин на разрыве, получим систему соотношений:

$$\begin{cases} [\rho] D - [\rho u] & = 0 \\ [\rho u] D - [p - \rho u^2] & = 0 \\ [E] D - [u(E + p)] & = 0; \end{cases}$$

8 Соотношения на ударной волне (одномерная нестационарная газовая динамика)



Выведем соотношения на ударной волне. Для этого рассмотрим ударную волну, распространяющуюся вправо при этом параметры течения до фронта ударной волны обозначаются индексом **2**, параметры за фронтом — индексом **3**.

$$D = \frac{\rho u}{\rho}$$

Учтем:

$$[\rho] D - [\rho u] = 0$$

Введем массовую скорость потока газа c . Она перпендикулярна фронту ударной волны.

$$c_2 = c = \rho_3(D - u_3) = \rho_2(D - u_2)$$

$$[\rho u] D - [p - \rho u^2] = 0 \Rightarrow \rho_3 u_3 (D - u_3) - \rho_2 u_2 (D - u_2) - (p_3 - p_2) = 0$$

с учетом предыдущего:

$$c_2(u_3 - u_2) - (p_3 - p_2) = 0$$

$$(u_3 - u_2) - \frac{(p_3 - p_2)}{c_2} = 0$$

И еще:

$$c_2 = c = \rho_3(D - u_3) = \rho_2\left(\frac{\rho_3 u_3 - \rho_2 u_2}{\rho_3 - \rho_2} - u_2\right) = \frac{\rho_3 \rho_2 (u_3 - u_2)}{\rho_3 - \rho_2}$$

$$\begin{cases} c_2 = \frac{\rho_3 \rho_2 (u_3 - u_2)}{\rho_3 - \rho_2} \\ (u_3 - u_2) - \frac{(p_3 - p_2)}{c_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{\rho_3 \rho_2 (p_3 - p_2)}{\rho_3 - \rho_2} \Rightarrow c_2^2 = \frac{\rho_2 (p_3 - p_2)}{1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}}$$

С использованием соотношения **Ренкина-Гюгоннио**

$$\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{(\gamma - 1)p_3 + (\gamma + 1)p_2}{(\gamma + 1)p_3 + (\gamma - 1)p_2}$$

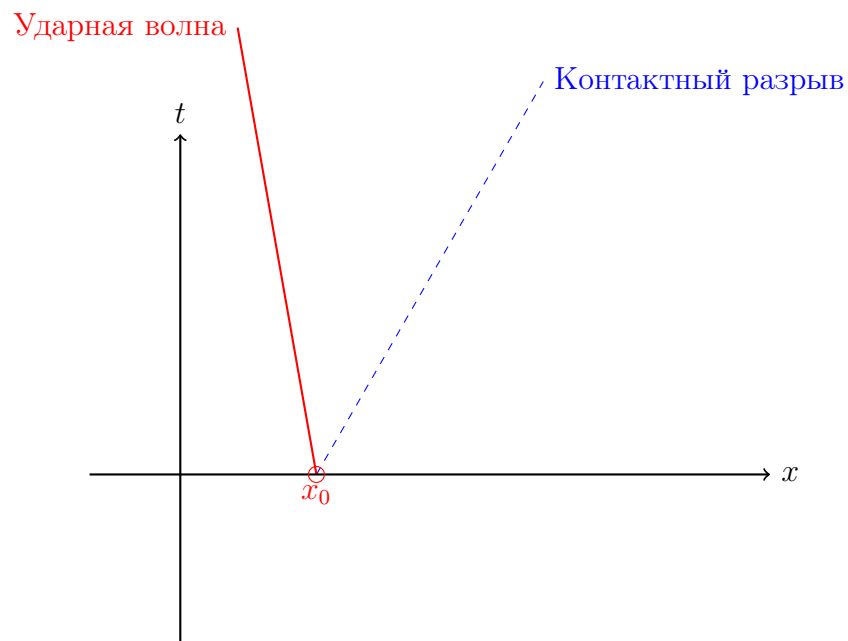
$$c_2^2 = \frac{\rho_2 (p_3 - p_2)}{1 - \frac{(\gamma - 1)p_3 + (\gamma + 1)p_2}{(\gamma + 1)p_3 + (\gamma - 1)p_2}} = \frac{\rho_2 ((\gamma + 1)p_3 - (\gamma - 1)p_2)}{2}$$

Выражение для массовой скорости газа через ударную волну:

$$c_2 = \sqrt{\frac{\rho_2 (p_3 - p_2)}{1 - \frac{(\gamma - 1)p_3 + (\gamma + 1)p_2}{(\gamma + 1)p_3 + (\gamma - 1)p_2}}} = \frac{\rho_2 ((\gamma + 1)p_3 - (\gamma - 1)p_2)}{2}$$

В итоге:

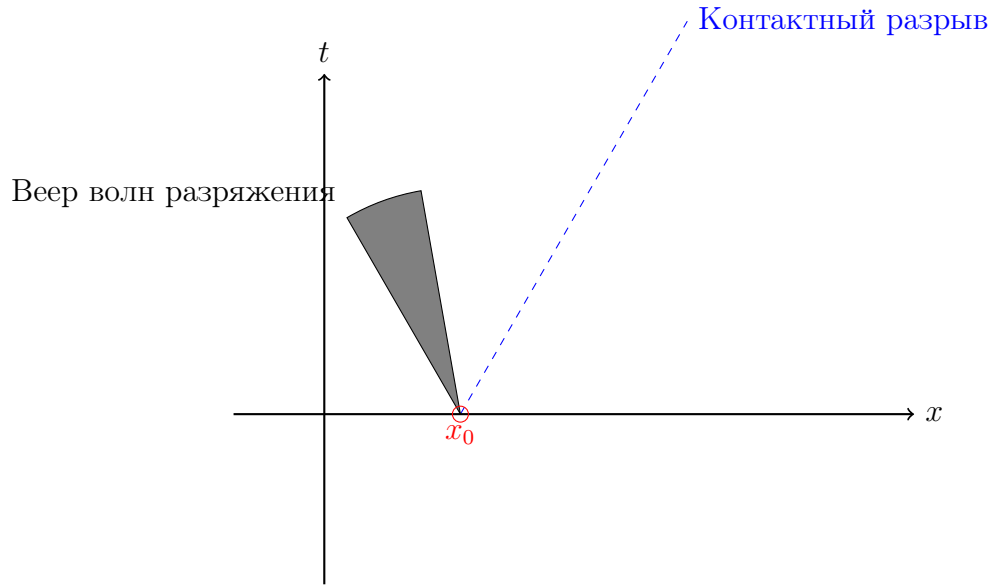
$$\begin{cases} c_2 = \frac{\rho_2 ((\gamma + 1)p_3 - (\gamma - 1)p_2)}{2} \\ (u_3 - u_2) - \frac{(p_3 - p_2)}{c_2} = 0 \end{cases}$$



Аналогично, для волны, идущей влево, при этом параметры течения до фронта ударной волны обозначаются индексом **1**, параметры за фронтом — индексом **3**.

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\rho_1((\gamma+1)p_3 - (\gamma-1)p_1)}{2} \\ (u_3 - u_1) - \frac{(p_3 - p_1)}{c_1} = 0 \end{cases}$$

9 Соотношения на веере волн разрежения (одномерная нестационарная газовая динамика)



Выведем соотношения на центрированном *веере волн разрежения*.

Веер волн разрежения — возникает тогда, когда в канале постоянной ширины внезапно начинает двигаться поршень. Тогда с одной стороны поршня возникает *зона разрежения*, которая распространяется в плоскости вдоль прямых характеристик, занимающих угловую область. Все характеристики внутри этой области пересекаются в одной точке совпадающей с точкой положения поршня в момент начала движения. Для определенности рассмотрим веер волн разрежения распространяющийся влево; при этом параметры течения до первой характеристики веера обозначаются индексом **1**, параметры за последней характеристикой — индексом **3**.

Соотношения в инвариантах, записанные вдоль характеристик противоположного семейства (то есть семейства тех характеристик, которые образуют направленный вправо веер волн разрежения) можно в «скачках» записать:

$$[u] \pm \frac{2}{\gamma - 1} [a] = 0$$

- «+» — левая волна
- «-» — правая волна

Еще одно соотношение вытекает из непрерывности величины энтропии при переходе через веер волн разрежения:

$$[S] = 0; \quad S = \frac{p}{\rho^\gamma}$$

S — энтропийная функция.

Далее:

$$u_3 - u_1 + \frac{2}{\gamma - 1}(a_3 - a_1) = 0$$

$$\frac{p_3}{\rho_3^\gamma} = \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \Rightarrow \rho_3 = \rho_1 \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\begin{cases} u_3 - u_1 + \frac{2}{\gamma-1}a_1 \left(\frac{a_3}{a_1} - 1 \right) = 0 \\ a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \end{cases} \Rightarrow u_3 - u_1 + \frac{2}{\gamma-1}a_1 \left(\sqrt{\frac{p_3 \rho_1}{p_1 \rho_3}} - 1 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$u_3 - u_1 + \frac{2}{\gamma-1}a_1 \left(\sqrt{\frac{p_3 p_1^{\frac{1}{\gamma}}}{p_1 p_3^{\frac{1}{\gamma}}}} - 1 \right) = 0 \Rightarrow u_3 - u_1 - (p_3 - p_1) \left(\frac{2a_1}{(p_3 - p_1)(\gamma - 1)} \left(1 - \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) \right)$$

Пусть:

$$\frac{1}{c_1} = \left(\frac{2a_1}{(p_3 - p_1)(\gamma - 1)} \left(1 - \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) \right)$$

тогда, после не сложных преобразований:

$$c_1 = \frac{a_1 \rho_1 (\gamma - 1) \left(1 - \frac{p_3}{p_1} \right)}{2\gamma \left(1 - \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right)}$$

- левая волна

$$u_3 - u_1 + \frac{2}{\gamma - 1}a_1 \left(1 - \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_3 - u_1 + \frac{p_3 - p_1}{c_1} = 0 \\ c_1 = \frac{a_1 \rho_1 (\gamma - 1) \left(1 - \frac{p_3}{p_1} \right)}{2\gamma \left(1 - \left(\frac{p_3}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right)} \end{cases}$$

- правая волна

$$u_3 - u_2 + \frac{2}{\gamma - 1}a_2 \left(1 - \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u_3 - u_2 + \frac{p_3 - p_2}{c_2} = 0 \\ c_2 = \frac{a_2 \rho_2 (\gamma - 1) \left(1 - \frac{p_3}{p_2} \right)}{2\gamma \left(1 - \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right)} \end{cases}$$

10 Задача Римана (одномерная нестационарная газовая динамика)

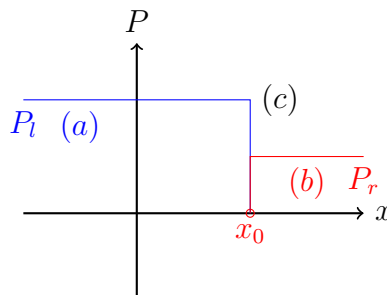
1 Постановка

Задача Римана о распаде произвольного разрыва — задача о построении аналитического решения нестационарных уравнений механики сплошных сред, в применении к распаду произвольного разрыва.

«Ударная труба» — установки, используемой в лабораториях для создания ударных волн, быстро движущихся газовых потоков и т. д.

В части трубы (а), отделенной диафрагмой (с), каким-либо способом создается газ с повышенным давлением ($P_l > P_r$, за счет взрыва, нагнетания компрессором и т. д.). В начальный момент диафрагма, отделяющая этот газ от «фона» (b) (газа при обычных условиях), прорывается, и в этом месте возникает разрыв, не удовлетворяющий условиям Гюгонио. В результате его распада по «фоновому» газу вправо будет распространяться ударная волна, интенсивность которой, как следует из общих соображений, определяется разностью давлений $P_l - P_r$. Однако провести детальный расчет характеристик этой ударной волны и тем самым построить «теорию ударной трубы» можно лишь на основе решения задачи о распаде разрыва.

Примерная схема «ударной трубы» :



В общей постановке задача Римана формулируется следующим образом: в начальный момент $t = 0$ в неограниченном пространстве вдоль плоскости $x = x_0$ все параметры испытывают произвольный разрыв. В каждом из полупространств ($x > x_0$, $x < x_0$) газ однороден, значения всех его параметров постоянные. В классической постановке предполагается, что диссипативные процессы в среде отсутствуют. Газ по обе стороны от разрыва в общем случае может обладать разными термодинамическими свойствами, например разными постоянными в уравнениях состояния (это не наш случай).

Решение задачи о распаде произвольного разрыва состоит в определении газодинамического течения, возникающего при $t > 0$. Другими словами, речь идет о решении

задачи Коши для уравнений газовой динамики, в которой начальные условия заданы в виде описанного выше произвольного разрыва.

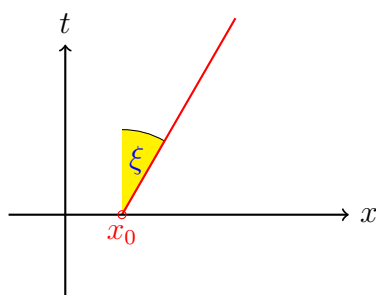
Риман показал, что решение задачи о распаде произвольного разрыва является **автомодельным**.

Автомодельное решение — такое решение, в которое независимые переменные x и t входят не произвольным образом, а лишь в комбинации

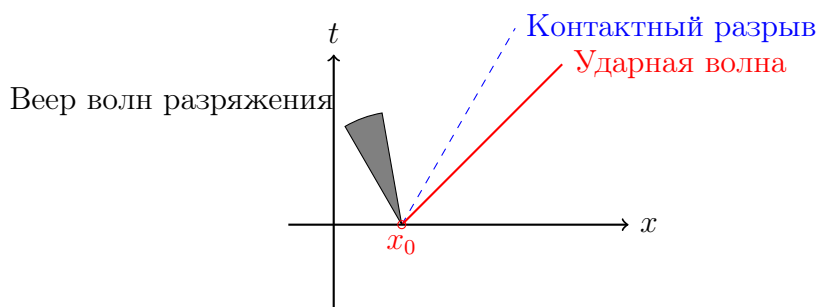
$$\begin{cases} \xi = \frac{x}{t} \\ f(x, t) = f(\xi), f \in \{p, \rho, U\} \end{cases}$$

ξ — автомодельная переменная

Графики приведены из расчета $x_0 = 0$:

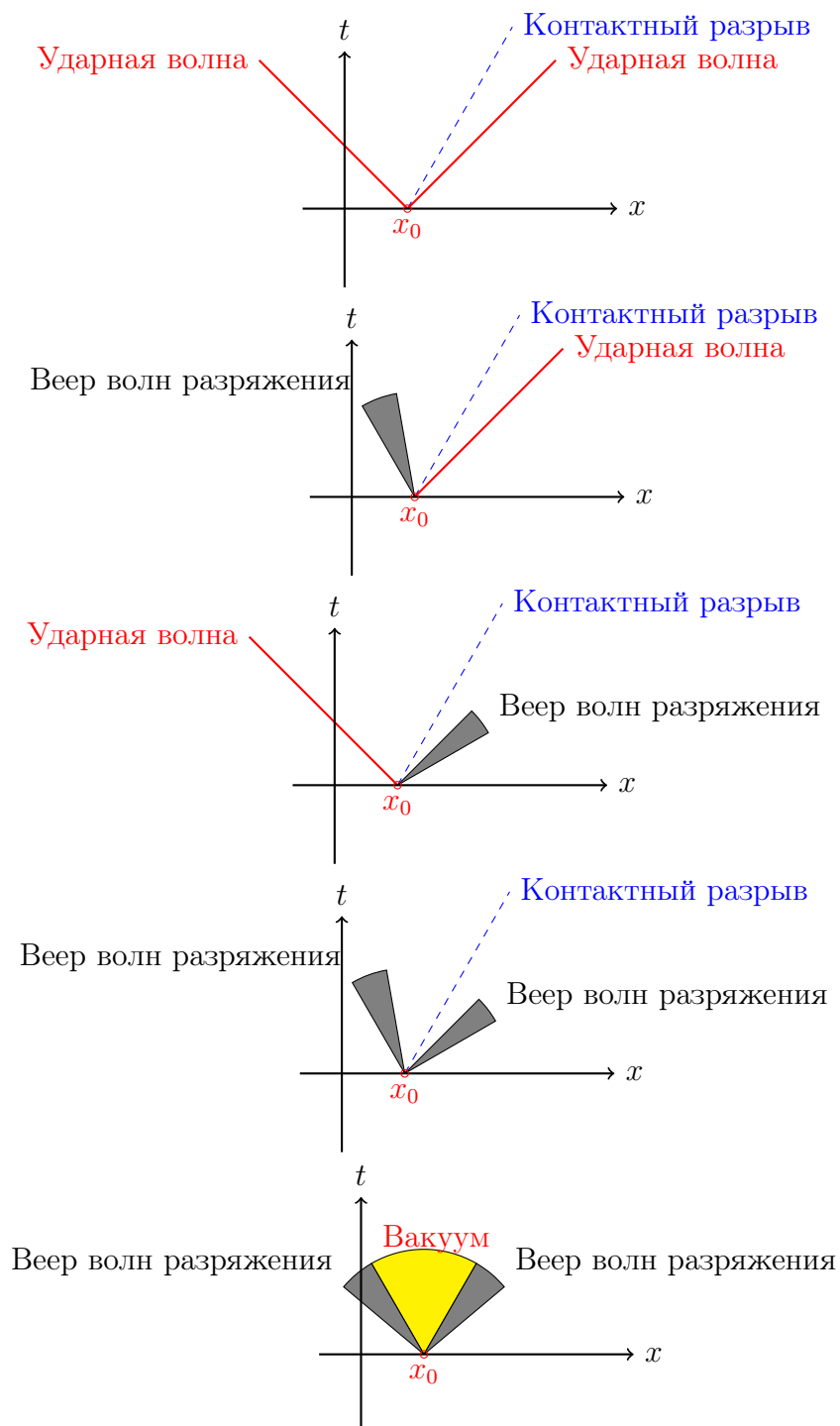


Риман показал, что в каждую сторону от разрыва может распространяться не более одной волны, ударной или центрированной волны разрежения (**веер волн разрежения**).



Контактный разрыв — траектория взаимодействия между двумя газами.

2 Случаи



Данные конфигурации были установлены Риманом и Кочиным. Первые четыре из них содержат контактный разрыв, на котором испытывает скачок плотность, а **давление и скорость непрерывны** и имеют одинаковые постоянные значения в областях слева и справа от контактного разрыва. Эти области отделены от невозмущенных областей справа и слева либо ударной волной, либо волной разрежения. Последняя конфигурация представляет предельный случай, когда в результате разлета образуется область вакуума, в которой плотность падает до нуля в двух волнах разрежения, примыкающих к области вакуума справа и слева.

11 Выбор параметров сетки и постановка краевых условий в методе Годунова.

1 Шаг сетки

Учитывая сказанное выше, рассмотрим :

Шаг расчетной сетки по временной координате в методе Годунова можно определить из критерия устойчивости Куранта-Фридрихса-Леви. Применительно к рассматриваемой схеме это условие формулируется следующим образом:

Волны, возникающие в задаче распада произвольного разрыва в точке $j + \frac{1}{2}$, не должны за время Δt достигать боковых граней $j + \frac{3}{2}$ и $j - \frac{1}{2}$ и искажать *автомодельное решение*.

Реализация этого принципа приводит к следующим соотношениям:

$$\Delta t_j = r \frac{\Delta x_j}{\max \left(|D_{j+\frac{1}{2}}^L|, |D_{j-\frac{1}{2}}^L| \right)}$$

где

- $D_{j+\frac{1}{2}}^L$ — значение скорости самой левой волны в распаде разрыва;
- $D_{j-\frac{1}{2}}^R$ — значение скорости самой правой волны в распаде разрыва;

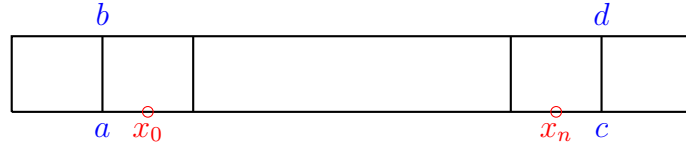
В итоге мы берем:

$$\Delta t = \min_j \Delta t_j$$

2 Постановка граничных условий

Особенностью постановки и реализации граничных условий в методах контрольного объема (в том числе и в методе Годунова) является необходимость задания или расчета потоков через грань контрольного объема, совпадающую границей расчетной области. Для первой $i = 1$ и последней $i = n$ ячеек расчетного слоя надо определить потоки массы, импульса и энергии через грани.

Часто для задания граничных условий вводятся «виртуальные» расчетные ячейки. Для этого слева от первой ячейки и справа от последней ячейки вводится еще по одной дополнительной ячейке, в каждой из которых задаются такие параметры течения, что бы при решении задачи Римана на боковой грани $a - b$ и $-d$ моделировались требуемые потоки.



3 Типы граничных процедур

Все предположения производятся относительно левой границы

Неподвижная жесткая стенка. Отсутствие перетекания потока массы газа через границу, что соответствует условию нулевой скорости потока на данной грани $U = 0$. В виртуальной ячейке тогда нужно задать следующие параметры течения:

$$\begin{cases} p_w = p_1 \\ \rho_w = \rho_1 \\ u_w = -u_1 \end{cases}$$

- w — параметры в виртуальной ячейке
- 1 — параметры в первой ячейке

Получаемые в задаче распада разрыва параметры течения на боковой грани реализуют нулевой поток массы через эту грань.

Резервуар неограниченной емкости. Этому случаю математически соответствует задание на грани значение давления \tilde{P} . Скорость втекания можно определить по формуле

$$\tilde{U} = u_1 \frac{\tilde{P} - p_1}{c_1}$$

- если $\tilde{P} > p_1$, то

$$c_1 = \frac{\sqrt{\rho_1 \cdot ((\gamma + 1)\tilde{P} + (\gamma + 1)p_1)}}{2}$$

- если $\tilde{P} < p_1$, то

$$c_1 = \frac{a_1 \rho_1 (\gamma - 1) \left(1 - \frac{P}{p_1}\right)}{2\gamma \left(1 - \left(\frac{P}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\right)}$$

Втекающий сверхзвуковой поток. Пусть верхнее подчеркивание обозначает параметры сверхзвукового потока, тогда, если $\bar{U} > \bar{c} = \sqrt{\frac{\gamma \bar{P}}{R}}$, то

$$\begin{cases} p_w &= \bar{P} \\ \rho_w &= \bar{R} \\ u_w &= \bar{U} \end{cases}$$

Вытекающий сверхзвуковой поток При этом в виртуальной ячейке задаются следующие параметры течения:

$$\begin{cases} p_w &= p_1 \\ \rho_w &= \rho_1 \\ u_w &= u_1 \end{cases}$$

Можно рассмотреть и большее число вариантов, на эти являются основными.