Московский авиационный институт
(государственный ТЕХнический университет)

Факультет прикладной математики

Кафедра вычислительной математики и программирования

Решение задач по Функциональному Анализу на повышение оценки

Преподаватель: А. Н. Сиротин
Студент: И. К. Никитин

Москва, 2011

Содержание

1. Сильный и слабый пределы

Для последовательности $x_n(t) = D(t^n) \in L_2([0,1])$, где $D(t^n)$ — функция Дирихле, установить существование сильного и слабого пределов. Вычислить их если они существуют.

1.1. Подготовка

Вспомним, что функция Дирихле — функция $D\colon \mathbb{R} \mapsto \{0,1\}$, принимающая значение 1, если аргумент есть рациональное число, и значение 0, если аргумент есть иррациональное число,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Норма в L_2: $\|x\| = \left(\int\limits_X x^2(t)\, d\,\mu \right)^{\frac{1}{2}}$

Сильный предел:

$$x_n \underset{s}{\to} x \Leftrightarrow \|x - x_n\| \to 0;$$

Слабый предел:

$$x_n \underset{w}{\to} x \quad \Leftrightarrow \quad \forall f \in X^* \quad f(x_n) \to f(x),$$

где $x_n \in X$; X^* — сопряженное к X.

1.2. Сильный предел

$$\|x\| = \left(\int\limits_{[0,1]} x_n^2(t)\, d\,\mu(dt) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_{[0,1]} D(t^n)^2\, d\,\mu(dt) \right)^{\frac{1}{2}}$$

Последовательность x_n сильно сходится к 0.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - 0\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_{[0,1]} D(t^n)^2\, d\,\mu(dt) \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 \cdot \mu(\mathbb{X}) + 0 \cdot \mu(\mathbb{X})) = \lim_{n\to\infty} (0) = 0,$$

где

$$\mathbb{X} = \{\mathbb{Q}\} \cup \{ \sqrt[n]{x} : x \in \mathbb{Q}\}.$$

Объясним, почему это так. Проблема заключается в вычислении $D(t^n)$. Для нее получим:

$$D(t^n) = \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{X}, \\ 0, & t \notin \mathbb{X}. \end{cases}$$

Может показаться, что $D(t^n) = D(t)$. Однако, это не так. Есть иррациональные числа, которые становятся рациональными после возведения в соответсвующую степень.

$$\left(\sqrt[2]{2}\right)^2 = 2 \in \mathbb{Q}.$$

Так как $\mathbb{Q}$ — счетно, то и $\mathbb{X}$ — счетно, можно утверждать, что это множество меры нуль. Более того:

$$\mu(\mathbb{X}) \leqslant 2 \cdot \mu(\mathbb{Q}) = 0.$$

Таким образом, сильный предел существует и равен нулю.

1.3. Слабый предел

Из определения слабого предела и определению неприрывности следует, что если сильный предел существует, то слабый тоже существует и равен ему.

Таким образом, оба предела существуют и равны нулю.

2. Спектр оператора

Найти спектр оператора:

$$A : C([-1,1]) \to C([-1,1]), \quad (Ax)(t) = x(-t).$$

2.1. Собственные значения

λ — собственные значения. Нужно их найти:

$$Ax(t) = \lambda x(t);$$

$$\begin{cases} x(-t) &= \lambda x(t), \\ x(t) &= \lambda x(-t) \end{cases}$$

После подстановки первого уравнения во второе получим:

$$x(t) = \lambda^2(t);$$

$$\lambda^2 = 1;$$

Из чего следует $\lambda = -1$, $\lambda = 1$.

2.2. Спектр

Выясним теперь, когда оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ не является ограниченным или $\nexists$.

$$(A - \lambda I)x(t) = y(t).$$

$$x(-t) - \lambda x(t) = y(t).$$

Опять запишем систему:

$$\begin{cases} x(-t) - \lambda x(t) &= y(t), \\ x(t) - \lambda x(-t) &= y(-t) \end{cases} \begin{cases} x(-t) &= \lambda x(t) + y(t), \\ x(t) - \lambda x(-t) &= y(-t) \end{cases}$$

$$x(t) - \lambda\left(\lambda x(t) + y(t)\right) = y(-t)$$

$$x(t) - \left(\lambda^2 x(t) + \lambda y(t)\right) = y(-t)$$

$$x(t) - \lambda^2 x(t) - \lambda y(t) = y(-t)$$

$$(1 - \lambda^2) \cdot x(t) = y(-t) + \lambda y(t)$$

$$x(t) = \frac{y(-t) + \lambda y(t)}{(1 - \lambda^2)}$$

Т.е. оператор $A \nexists$ при $\lambda = -1$, $\lambda = 1$.
Таким образом, учитывая предыдущий пункт, можно сделать вывод:

$$\delta(A) = \{-1, 1\}.$$

3. Сопряженный оператор

Построить оператор, сопряженный оператору $A : C([0,1]) \to C([0,1])$, который по формуле $(Ax)(t) = tx\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

3.1. Решение

$$A : C([0,1]) \to C([0,1]); \quad A^* : C^*([0,1]) \to C^*([0,1]) \cong V([0,1]);$$
$$A^* y(x) = y(Ax), \quad x \in C([0,1]), y \in C^*([0,1]).$$

1.

$$A^* y(x) = \int\limits_{[0,1]} x(t)\, d\, A^* y(t).$$

2.

$$y(Ax) = \int\limits_{[0,1]} Ax(t)\, d\, y(t) = \int\limits_{[0,1]} tx\left(\frac{1}{2}\right)\, d\, y(t) = x\left(\frac{1}{2}\right) \int\limits_{[0,1]} t\, d\, y(t) =$$

$$= x\left(\frac{1}{2}\right)\left(ty(t)\,\big|_0^1 - \int\limits_{[0,1]} y(t)\, d\, t\right) = x\left(\frac{1}{2}\right)\left(y(1) - \int\limits_{[0,1]} y(t)\, d\, t\right) =$$

$$= \int\limits_{[0,1]} x(t)\, d\, \mathbf{1}\left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y(1) - \int\limits_{[0,1]} y(t)\, d\, t\right) =$$

$$= \int\limits_{[0,1]} x(t)\, d\, \left(\mathbf{1}\left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y(1) - \int\limits_{[0,1]} y(x)\, d\, x\right)\right).$$

Из первого и второго следует:

$$(A^* y)(t) = \mathbf{1}\left(t - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(y(1) - \int\limits_{[0,1]} y(x)\, d\, x\right)$$

4. Последовательность ограниченных функций

Построить последовательность $\{f_n(t)\}$ ограниченных функций на $(0,1)$ такую, что $f_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$ при каждом $t \in (0,1)$, но $\|f_n\|_1 \to \infty$.

4.1. Решение

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant \dfrac{a}{n} \\ n^2, & \dfrac{a}{n} < t < \dfrac{b}{n} \\ 0, & t \geqslant \dfrac{b}{n} \end{cases} \text{, где} \quad a < b \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, последовательность является решением задачи.
Во-первых, она ограничена.

$$\forall \alpha > 0, \quad \exists c = n^2 + \alpha : \quad |f_n(t)| < c, \quad \forall t \in (0,1).$$

Здесь и ниже α могут быть совсем любым числом большим нуля. Потому мы не стали их как-то ограничивать. Для определенности, можно считать, что $\alpha = 1$.
Во-вторых $f_n(t) \to 0$ при $n \to \infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall \alpha > 0 \quad \exists N = \frac{b}{t} + \alpha : \quad \forall \quad n > N, \quad t > \frac{b}{n}, \quad |f_n(t)| = 0 < \varepsilon.$$

В-третьих $\|f_n\|_1 \to \infty$:

$$\|f_n\|_1 = \int\limits_0^1 f_n(t) d\,t = \int\limits_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}} n^2 d\,t = n \cdot (b - a).$$

При $n \to \infty$, соответсвенно $n \cdot (b - a) \to \infty$.
Ответом является:

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant \dfrac{a}{n} \\ n^2, & \dfrac{a}{n} < t < \dfrac{b}{n} \\ 0, & t \geqslant \dfrac{b}{n} \end{cases} \text{, где} \quad a < b \in \mathbb{R}.$$

5. Предел последовательности обобщенных функций (1)

Найти предел последовательности обобщенных функций $\{f_n\}$ при $n \to \infty$:

$$f_n(t) = \begin{cases} -n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-t^n}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

5.1. Решение

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \cdot \varphi(t)\, d\,t = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \left(-n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-t^n}\right) \cdot \varphi(t)\, d\,t.$$

Пусть $\tau = t^n$, тогда $t = \sqrt[n]{\tau}$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \left(-n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-t^n}\right) \cdot \varphi(t)\, d\,t = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{\infty} -e^{-\tau} \cdot \varphi(\sqrt[n]{\tau})\, d\,\tau.$$

φ — финитная и гладкая, φ — ограниченная.

$$|\varphi(x)| \leqslant M \quad \Rightarrow \quad |\varphi(\sqrt[n]{\tau})| \leqslant M \quad \Rightarrow \quad \forall n \quad |-e^{-\tau}\varphi(\sqrt[n]{\tau})| \leqslant M \cdot |e^{-\tau}|.$$

$|e^{-\tau}|$ — интегрируемая на $[0, \infty)$ функция.

По теореме Лебега, можно перейти:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{A} f_n(t) d\,\mu = \int\limits_{A} \lim_{n\to\infty} f_n(t) d\,\mu,$$

если $\exists f \in L(A),$ такая, что $|f_n(t)| \leqslant |f(t)|$.

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{\infty} -e^{-\tau} \cdot \varphi(\sqrt[n]{\tau})\, d\,\tau = \int\limits_{0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} -e^{-\tau} \cdot \varphi(\sqrt[n]{\tau})\, d\,\tau =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} -e^{-\tau} \cdot \varphi(0)\, d\,\tau = -\varphi(0) \cdot \int\limits_{0}^{\infty} -e^{-\tau} d\,\tau = -\varphi(0) \cdot \left(-e^{-\tau}\big|_0^{\infty}\right) = -\varphi(0) = -\delta(\varphi).$$

Т.о., $-\delta(\varphi)$ — предел последовательности обобщенных функций $\{f_n\}$ при $n \to \infty$:

$$f_n(t) = \begin{cases} -n \cdot t^{n-1} \cdot e^{-t^n}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

6. Предел последовательности обобщенных функций (2)

Найти предел последовательности обобщенных функций $\{f_n\}$ при $n \to \infty$:

$$f_n(t) = \frac{1}{2n}\, e^{-\frac{|t|}{n}}; \quad f_n(t) = \frac{n}{2}\, e^{-n\cdot|t|}.$$

6.1. Первая

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2n}\, e^{-\frac{|t|}{n}} \cdot \varphi(t)\, d\,t =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{2n}\, e^{\frac{t}{n}} \cdot \varphi(t)\, d\,t + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{2n}\, e^{-\frac{t}{n}} \cdot \varphi(t)\, d\,t.$$

Пусть $\tau = \dfrac{t}{n}$, тогда $t = n \cdot \tau$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}\, e^{\tau} \cdot \varphi(n\tau)\, d\,\tau + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{2}\, e^{-\tau} \cdot \varphi(n\tau)\, d\,\tau.$$

По теореме Лебега, можно перейти:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{A} f_n(t) d\,\mu = \int\limits_{A} \lim_{n\to\infty} f_n(t) d\,\mu,$$

если $\exists f \in L(A),$ такая, что $|f_n(t)| \leqslant |f(t)|$.

У нас:

$$\exists A = [-a, a] : \varphi(t) = 0 \text{ при } t \in A$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(n\tau) \text{ при } t \in \left[-\frac{a}{n}, \frac{a}{n}\right] = A'$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\, e^{\tau} \cdot \varphi(n\tau) = 0 \text{ при } \tau \in A'.$$

Кроме того,

- $\dfrac{1}{2}e^{-\tau}$ — ограничена на $[0, \infty)$;
- $\varphi(n\tau)$ — ограничена;

Таким образом $\dfrac{1}{2}\, e^{\tau} \cdot \varphi(n\tau)$ — ограничена:

$$\exists f(\tau) \in C(A) : |f_n(\tau)| \leqslant |f(\tau)|.$$

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\, e^{\tau} \cdot \varphi(n\tau)\; d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\, e^{-\tau} \cdot \varphi(n\tau)\; d\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\, e^{\tau} \cdot 0\; d\tau + \int\limits_{0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\, e^{-\tau} \cdot 0\; d\tau = 0.$$

6.2. Вторая

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{2}\, e^{-n\cdot|t|} \cdot \varphi(t)\, d\,t =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{n}{2}\, e^{n\cdot t} \cdot \varphi(t)\, d\,t + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{n}{2}\, e^{-n\cdot t} \cdot \varphi(t)\, d\,t$$

Пусть $\tau = n \cdot t$, тогда $t = \dfrac{\tau}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{1}{2}\, e^{\tau} \cdot \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)\, d\,\tau + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{1}{2}\, e^{-\tau} \cdot \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)\, d\,\tau$$

Примем во внимание что:

$$|\varphi(t)| \leqslant M \quad \Rightarrow \quad |\varphi(\frac{\tau}{n})| \leqslant M$$

$$\Rightarrow \quad \forall \left|\frac{1}{2}\, e^{-\tau} \cdot \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)\right| \leqslant M \cdot \left|\frac{1}{2}\, e^{-\tau}\right|$$

Кроме того, $\dfrac{1}{2}e^{-\tau}$ — интегрируемая на $[0, \infty)$ функция.

По теореме Лебега, можно перейти:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{A} f_n(t) d\,\mu = \int\limits_{A} \lim_{n\to\infty} f_n(t) d\,\mu,$$

если $\exists f \in L(A),$ такая, что $|f_n(t)| \leqslant |f(t)|$.

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\, e^{\tau} \cdot \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)\right)\, d\,\tau + \int\limits_{0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\, e^{-\tau} \cdot \varphi\left(\frac{\tau}{n}\right)\right)\, d\,\tau =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\, e^{\tau} \cdot \varphi(0)\right)\, d\,\tau + \int\limits_{0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}\, e^{-\tau} \cdot \varphi(0)\right)\, d\,\tau =$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau}\, d\,\tau + \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\tau}\, d\,\tau\right) = \frac{1}{2}\,\varphi(0) \cdot 2 = \varphi(0) = \delta(\varphi).$$