Задачи математических олимпиад
студентов технических вузов Москвы, Зеленоград, 1996 — 2016
(*в обратном хронологическом порядке*)
Задачи 1 — 4 для I курса, задачи 5 — 8 для II — IV курсов

Апрель 2016

Задача 1. *Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром 1. Вычислить* $\left|\vec{AB}\times\vec{CD}+\vec{BC}\times\vec{DA}\right|$.

Решение. Чтобы выбрать удобные координаты, впишем тетраэдр в куб со стороной $2a = 1/\sqrt{2}$ с центром O и рёбрами, параллельными осям. Тогда

$$A(a;a;a),\quad B(a;-a;-a),\quad C(-a;a;-a),\quad D(-a;-a;a).$$

Получаем $\vec{AB}\times\vec{CD}=a^2(-8;0;0)$, $\vec{BC}\times\vec{DA}=a^2(0;0;-8)$, где $a^2=1/8$.

Ответ: $\sqrt{2}$.

Задача 2. *Последовательность* (a_n) *задана рекуррентно*:

$$a_1=1,\ a_{n+1}=\begin{cases} a_1+\ldots+a_n, & \text{если } n \text{ чётно},\\ a_n+1, & \text{если } n \text{ нечётно.}\end{cases}$$

Найти остаток от деления a_{2016} *на* 24.

Решение. Выписывая последовательность

$$\begin{array}{cccccccccccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \ldots\\ a_n & 1 & 2 & 3 & 4 & 10 & 11 & 31 & 32 & 94 & 95 & \ldots\end{array}$$

можно заметить, что $\forall\, n\in\mathbb{N}\ a_{2n+3}=3a_{2n+1}+1$. Следовательно,

$$a_{2n+3}+\frac12=3\Big(a_{2n+1}+\frac12\Big)\Longrightarrow a_{2n+3}+\frac12=\Big(a_3+\frac12\Big)\cdot3^n=\frac{7\cdot3^n}{2}\Longrightarrow a_{2n+4}=a_{2n+3}+1=\frac{7\cdot3^n+1}{2}.$$

Нас интересует $n=1006$. Найдём остаток от деления числителя на 48.

$$\left.\begin{array}{ll}(\operatorname{mod}16) & 7\cdot3^{1006}+1\sim7\cdot3^2+1=64\sim0\\ (\operatorname{mod}3) & \qquad\quad 7\cdot3^{1006}+1\sim1\end{array}\right\}\Longrightarrow 7\cdot3^{1006}+1\sim16\,(\operatorname{mod}48).$$

Ответ: $a_{2016}\sim8\,(\operatorname{mod}24)$.

Задача 3. *Вычислить* $\lim\limits_{x\to1}\int\limits_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$.

Решение. Сделаем замену $t=e^y$.

$$\int\limits_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}=\int\limits_{\ln x}^{2\ln x}\frac{e^y}{y}dy=\int\limits_{\ln x}^{2\ln x}\frac{1+O(y)}{y}dy=\int\limits_{\ln x}^{2\ln x}\frac1y+O(1)dy=\ln|y|\Big|_{\ln x}^{2\ln x}+O(\ln x)\xrightarrow[x\to0]{}\ln2.$$

Задача 4. *Истинно ли на множестве* $\mathbb{N}$ *высказывание* $\forall\, x\ \exists\, y\ \forall\, z\ \exists\, t\ \forall\, u\ \ |x-y|^u+tz \le uxy$ *?*

Решение. Ответ: ложно.
Зафиксируем какие угодно x и y. Тогда при $z = xy+1$ и $u = 1$ имеем
$|x-y|^u + tz \ge z > xy = uxy$.

Задача 5. *Дана матрица* H *размера* 10×10 : $h_{ij} = 1$ *при* $j = i+1$, *остальные* $h_{ij} = 0$. *Доказать, что не существует матрицы* X *такой, что* $X^2 = H$.

Решение. Матрица H^k состоит из таких элементов: $h^k_{ij} = 1$ при $j = i+k$, остальные $h^k_{ij} = 0$. Так что $H^9 \ne 0 = H^{10}$. Если бы $X^2 = H$, то $X^{18} \ne 0 = X^{20}$. Но так быть не может: с ростом степеней матрицы X ранг X^k (т. е. размерность множества $\{X^k\vec{v}:\ \vec{v}\in\mathbb{R}^{10}\}$) строго уменьшается, а затем стабилизируется, поэтому ранги X^{18} и X^{20} не могут различаться.

Задача 6. *Сколько всего строчек* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{21})$ *из* 0 *и* 1 *таких, что*
$\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{10} < \varepsilon_{11} + \ldots + \varepsilon_{21}$ *?*

Решение. Рассмотрим отображение

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{21}) \mapsto \overline{\varepsilon} = (1-\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2, \dots, 1-\varepsilon_{21}).$$

Если $\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_{10} = k$, $\varepsilon_{11}+\ldots+\varepsilon_{21} = m$, то $\overline{\varepsilon_1}+\ldots+\overline{\varepsilon}_{10} = 10-k$, $\overline{\varepsilon}_{11}+\ldots+\overline{\varepsilon}_{21} = 11-m$. Тогда $k < m \Leftrightarrow 10-k \ge 11-m$. Таким образом, установлено взаимно-однозначное отображение между строчками, удовлетворяющими условию задачи, и строчками, не удовлетворяющими ему.

Ответ: половина всех строчек, т. е. 2^{20}.

Задача 7. *Двое игроков поочерёдно называют числа из отрезка* $[-1;1]$: $a_1, a_2, a_3, \dots$
Выигрывает 1-й игрок, если ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$ *сходится, и 2-й, если ряд расходится.*
Существует ли у кого-нибудь выигрышная стратегия?

Решение. Ответ: выигрывает 1-й игрок. Он должен делать такие ходы:
$a_1 = 0$, $a_{2n+1} = -a_{2n}$. Тогда ряд сойдётся. Поскольку слагаемые ряда стремятся к 0, достаточно рассмотреть частичные суммы с нечётными номерами.

$$S_{2N+1} = \sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{a_{2n}}{2n} - \frac{a_{2n}}{2n+1}\Big) = \sum_{n=1}^{N}\frac{a_{2n}}{2n(2n+1)} \to S \in \mathbb{R},$$

т. к. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_{2n}|}{2n(2n+1)} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} < +\infty.$

Задача 8. *Функция* $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ *определена рекуррентно:* $f(1) = 1$, *а при* $n \ge 2\ \ f(n)$ — *это наименьшее натуральное число* $k \notin \{f(1), \dots, f(n-1)\}$, *такое, что* $k+n = 2^j$ *при некотором* $j \in \mathbb{N}$. *Вычислить* $f(1024)$.

Решение. Выписывая таблицу функции f

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$f(n)$	1	2	5	4	3	10	9	8	7	6	…

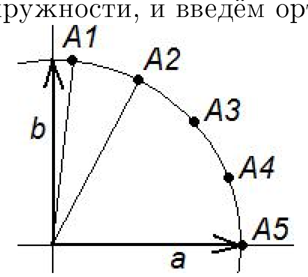
можно заметить, что $\forall\, n \in \mathbb{N}\ f(2^n) = 2^n$. Чтобы доказать это утверждение, заметим, что $2^n + 2^n = 2^{n+1}$, и проверим, что значение $f(x) = 2^n$ не появится при $x < 2^n$. Действительно, если $x < 2^n$, то $x + 2^n$ — не степень двух.

Ответ: $f(1024) = 1024$.

Апрель 2015

Задача 1. *Дан правильный 17-угольник $A_1A_2\dots A_{17}$ с центром O. Выразить вектор $\vec{OA_5}$ через $\vec{OA_1}$ и $\vec{OA_2}$.*

Решение. Поместим начало координат в точку O, возьмём за единицу радиус описанной окружности, и введём ортонормированный базис $\vec{a}$, $\vec{b}$, где $\vec{a} = \vec{OA_5}$.



$$\vec{OA_1} = \vec{a}\cos\frac{8\pi}{17} + \vec{b}\sin\frac{8\pi}{17}$$
$$\vec{OA_2} = \vec{a}\cos\frac{6\pi}{17} + \vec{b}\sin\frac{6\pi}{17}$$

Сложим с такими коэффициентами, чтобы избавиться от $\vec{b}$:

$$-\vec{OA_1}\sin\frac{6\pi}{17} + \vec{OA_2}\sin\frac{8\pi}{17} = \vec{a}\Big(-\cos\frac{8\pi}{17}\sin\frac{6\pi}{17} + \cos\frac{6\pi}{17}\sin\frac{8\pi}{17}\Big) = \vec{a}\sin\frac{2\pi}{17}.$$

Ответ: $\vec{a} = \dfrac{1}{\sin\frac{2\pi}{17}}\Big(\vec{OA_2}\sin\frac{8\pi}{17} - \vec{OA_1}\sin\frac{6\pi}{17}\Big)$.

Задача 2. *Вычислить* $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_x^{x^2} e^{t^2}dt$.

Решение. По теореме о среднем найдётся такая точка ξ, лежащая между x и x^2, что

$$\int_x^{x^2} e^{t^2}dt = (x^2 - x)e^{\xi^2}.$$

При $x \to 1$ имеем $\xi \to 1$, так что

$$\frac{1}{x-1}\int_x^{x^2} e^{t^2}dt = x\,e^{\xi^2} \to 1\,e^1 = e.$$

Задача 3. *Последовательность (a_n) задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n+3$. Вычислить* $\log_3 a_{2015}$.

Решение. По индукции доказываем, что $a_n = 2^{n+1} - 3$.

Ответ: $2016\log_3 2$.

Задача 4. *Калькулятор, упавший в лужу, может выполнять два действия: вместо сложения делает $x \oplus y = x + y + 1$, а вместо умножения $x \odot y = x^2 - y^2$. Константы, в том числе отрицательные, набираются безошибочно. Можно ли на этом калькуляторе вычислить $x + y$ и xy ?*

Решение. Можно. Сначала научимся складывать: $x + y = x \oplus y \oplus (-2)$. Затем — умножать на константу, например:

$$0{,}5x = \Big(x + \frac{1}{4}\Big)^2 - x^2 - \frac{1}{16} = \big(x \oplus (-0{,}75)\big) \odot x \oplus (-1{,}0625),$$

$$-0{,}5y = \Big(y - \frac{1}{4}\Big)^2 - y^2 - \frac{1}{16} = \big(y \oplus (-1{,}25)\big) \odot y \oplus (-1{,}0625).$$

Наконец, умножать можно так:

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4} = (0{,}5x + 0{,}5y)^2 - (0{,}5x - 0{,}5y)^2.$$

Задача 5. *Найти наибольшее собственное значение матрицы $A = (a_{ij})$ размера 10×10, где $a_{ij} = i$.*

Решение. Вычислим определитель матрицы $A - kE$. Для этого сначала вычтем первый столбец изо всех остальных столбцов, затем к первой строке прибавим все остальные строки:

$$\begin{vmatrix} 1-k & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 2-k & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 9 & 9 & 9 & \dots & 9-k & 9 \\ 10 & 10 & 10 & \dots & 10 & 10-k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-k & k & k & \dots & k & k \\ 2 & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 9 & 0 & 0 & \dots & -k & 0 \\ 10 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 55-k & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & -k & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 9 & 0 & 0 & \dots & -k & 0 \\ 10 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k \end{vmatrix} = (55-k)(-k)^9.$$

Ответ: $k_{\max} = 55$.

Задача 6. *Верно ли, что если ряд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ тоже сходится?*

Решение. Для знакоположительных рядов это верно, а в общем случае — нет!
Рассмотрим сходящийся по признаку Лейбница ряд из слагаемых $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Имеем

$$\frac{a_n}{1+a_n} = \frac{a_n(1+a_n) - a_n^2}{1+a_n} = a_n - \frac{a_n^2}{1+a_n} = a_n - b_n.$$

Но знакоположительный ряд из слагаемых b_n расходится: $b_n = \dfrac{1/n}{1+(-1)^n\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n}$.

Задача 7. *Пусть* $w_0, w_1, \dots w_{n-1}$ — *различные корни* n*-й степени из* 1. *Вычислить сумму* $S = \sum\limits_{k=0}^{n-1} w_k |1 - w_k|$.

Решение. Нам понадобятся суммы такого вида:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin 2k\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} \sin 2k\alpha \sin\alpha = \frac{1}{2\sin\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}\big(\cos(2k-1)\alpha - \cos(2k+1)\alpha\big) = \frac{\cos\alpha - \cos(2n+1)\alpha}{2\sin\alpha}.$$

Корни равны $w_k = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$;

$$|1 - w_k| = \sqrt{1 - 2\cos\frac{2\pi k}{n} + \cos^2\frac{2\pi k}{n} + \sin^2\frac{2\pi k}{n}} = \sqrt{2 - 2\cos\frac{2\pi k}{n}} = 2\sin\frac{\pi k}{n} \geq 0.$$

Мнимая часть равна 0 в силу симметрии. Вычислим действительную часть:

$$\operatorname{Re} S = 2\sum_{k=0}^{n-1} \sin\frac{\pi k}{n}\cos\frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\sin\frac{3\pi k}{n} - \sin\frac{\pi k}{n}\Big) =$$

$$= \frac{\cos\dfrac{3\pi}{2n} - \cos\dfrac{3\pi(2n+1)}{2n}}{2\sin\dfrac{3\pi}{2n}} - \frac{\cos\dfrac{\pi}{2n} - \cos\dfrac{\pi(2n+1)}{2n}}{2\sin\dfrac{\pi}{2n}} = \frac{2\cos\dfrac{3\pi}{2n}}{2\sin\dfrac{3\pi}{2n}} - \frac{2\cos\dfrac{\pi}{2n}}{2\sin\dfrac{\pi}{2n}} = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2n} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}.$$

Задача 8. *Существует ли отображение* $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ *такое, что* $f(f(n)) = 2n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ *?*

Решение. Существует.
Всякое натуральное число единственным способом представимо в виде $a\,2^k$, где a нечётное, $k \geq 0$ целое. Разобьём все нечётные числа на пары (a_i, b_i), $i = 1, 2, \dots$ Отображение строится так:

$$f(a_i\,2^k) = b_i\,2^k, \qquad f(b_i\,2^k) = a_i\,2^{k+1}.$$

Апрель 2014

Задача 1. *Пусть A, B — действительные матрицы* 5×3. *Какие значения может принимать* $\det(AB^T)$ *?*

Решение. Получится матрица 5×5, но её ранг не превышает ранг A, т.е. 3.

Ответ: $\det(AB^T) = 0$.

Задача 2. *Известно, что уравнение $P(x) = x^3+ax+4 = 0$ имеет кратный корень. Найти a.*

Решение. Кратный корень $P(x)$ является крнем $P'(x) = 3x^2 + a$, т.е. $x = \pm\sqrt{-a/3}$, что возможно только при $a \leqslant 0$. Подставляем корни $P'(x)$ в $P(x)$:

$$P(\sqrt{|a|/3}) = \frac{|a|^{3/2}}{3\sqrt{3}} - \frac{|a|^{3/2}}{\sqrt{3}} + 4 = -\frac{2|a|^{3/2}}{3\sqrt{3}} + 4 = 0 \Longrightarrow |a| = 3\sqrt[3]{4};$$

$$P(-\sqrt{|a|/3}) = \frac{2|a|^{3/2}}{3\sqrt{3}} + 4 > 0.$$

Ответ: $a = -3\sqrt[3]{4}$.

Задача 3. *Какое множество на плоскости составляют точки, не лежащие ни на одной из прямых $y = 4C^3x - C^4$?*

Решение. Зафиксируем x и найдём экстремальные значения y.

$$\frac{dy}{dC} = 12C^2x - 4C^3 = 0 \implies C = 0 \text{ или } C = 3x.$$

При $C = 0$ получаем $y = 0$, при $C = 3x \quad y = 27x^4$; очевидно, множество значений y неограниченно продолжается вниз.

Ответ: $y \geq 27x^4$.

Задача 4. *Двое поочерёдно называют по одному числу 0 или 1. Это делается в общей сложности 2014 раз. Первый игрок выигрывает, если сумма названных чисел не делится на 3. Есть ли у него выигрышная стратегия?*

Решение. Чтобы выиграть, первый игрок должен добиться того, чтобы сумма 2013 чисел делилась на 3 с остатком 1, тогда никакой последний ход второго игрока не приведёт к числу, делящемуся на 3. Стратегия первого игрока такова: первый ход 0, затем на каждый 0 второго игрока он отвечает 1, а на 1 отвечает 0. После 2013 ходов получится сумма $1006 = 3 \cdot 335 + 1$.

Задача 5. *Двое игроков поочерёдно заполняют клетки пустой таблицы* 2014×2014. *За один ход можно любую пустую клетку заполнить любым действительным числом. Первый игрок выигрывает, если в конце игры получится невырожденная матрица. Верно ли, что второй игрок может добиться победы при любой игре первого?*

Решение. Верно. Более того, второй игрок может добиться того, что получится матрица ранга не выше 1007. В ответ на каждый ход первого игрока (в клетку с координатами i, j) он должен ставить такое же число в клетку с координатами $i, 2015 - j$. Получится матрица с 1007 парами одинаковых столбцов.

Задача 6. *Вычислить* $\iiint\limits_G \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, *где* G *— правильный октаэдр с ребром* a; $\rho(x,y,z)$ *— расстояние от точки* (x,y,z) *до поверхности октаэдра.*

Решение. Обозначим через b расстояние от центра октаэдра до вершины: $b = a/\sqrt{2}$. Пусть начало координат в центре октаэдра, координаты вершин $(\pm b,0,0)$, $(0,\pm b,0)$, $(0,0,\pm b)$. Октаэдр симметричен относительно всех координатных плоскостей; часть, лежащая в первом октанте, задаётся неравенством $x+y+z<b$.

$$\iiint\limits_G \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 8\int\limits_0^b dx \int\limits_0^{b-x} dy \int\limits_0^{b-x-y} \frac{b-x-y-z}{\sqrt{3}}dz =$$

[при фиксированных x,y сделаем замену $w=b-x-y-z$]

$$= \frac{8}{\sqrt{3}}\int\limits_0^b dx \int\limits_0^{b-x} dy \int\limits_0^{b-x-y} w\,dw = \frac{8}{2\sqrt{3}}\int\limits_0^b dx \int\limits_0^{b-x} (b-x-y)^2 dy =$$

[при фиксированном x сделаем замену $v=b-x-y$]

$$= \frac{8}{2\sqrt{3}}\int\limits_0^b dx \int\limits_0^{b-x} v^2 dy = \frac{8}{6\sqrt{3}}\int\limits_0^b (b-x)^3 dx =$$

[сделаем замену $u=b-x$]

$$= \frac{8}{6\sqrt{3}}\int\limits_0^b u^3 du = \frac{8}{24\sqrt{3}}b^4 = \frac{b^4}{3\sqrt{3}} = \frac{a^4}{12\sqrt{3}}.$$

Задача 7. *Пусть* $X = \{1,2,\dots,9\}$. *Определить количество отображений* $g: X \mapsto X$ *таких, что* $10-g(x) = g(10-x)\ \forall\, x \in X$.

Решение. Имеем условия:

$$g(9)=10-g(1),\quad g(8)=10-g(2),\quad g(7)=10-g(3),\quad g(6)=10-g(4),\quad g(5)=5.$$

Значения $g(1),\dots,g(4)$ можно задать произвольно 9^4 способами, остальные значения определятся однозначно.

Ответ: $9^4 = 6561$.

Задача 8. *Доказать, что, какова бы ни была целочисленная матрица* A *размера* $n\times n$, *найдётся такое* k, *что все элементы матрицы* $A^{2k}-A^k$ *делятся на 3.*

Решение. Среди последовательности матриц $A, A^2, A^3, \dots$ найдутся сравнимые по mod 3. Пусть $A^{m+p}-A^m$ делится на 3. Тогда при всех $k \geqslant m$ $A^{k+p}-A^k$ делится на 3, так как умножение на целочисленную матрицу не нарушит делимость на 3. Выберем $k \geqslant m$, кратное p, тогда $A^{k+k}-A^k = A^{k+p+\dots+p}-A^k$ делится на 3.

Апрель 2013

Задача 1. *Существует ли матрица* 10×10 *из 0 и 1, определитель которой равен 10 ?*

Решение. Вычислим определитель такой матрицы $n \times n$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1-n$$

(из первой строки вычли сумму остальных строк). Теперь составим матрицу 10×10 из трёх блоков по диагонали:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & o & o & o & o \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & o & o & o & o \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & o & o & o & o \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & o & o & o & o \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & o & o & o & o \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & o & o & o & o \\ o & o & o & o & o & o & 0 & 1 & 1 & o \\ o & o & o & o & o & o & 1 & 1 & 0 & o \\ o & o & o & o & o & o & 1 & 0 & 1 & o \\ o & o & o & o & o & o & o & o & o & 1 \end{vmatrix} = -5\cdot(-2)\cdot 1 = 10.$$

Задача 2. *Последовательность* $\{a_n\}$ *задана рекуррентно:*
$a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n - 1$ *при чётном* n, $a_{n+1} = a_n + n$ *при нечётном* n.
Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/n^2)$.

Решение. Вычислим a_n с чётными и нечётными номерами

$$a_{2m} = 1 + \sum_{k=1}^{m}(2k-1) - (m-1) = 1 + m^2 - (m-1) = m^2 - m + 2; \quad a_{2m+1} = m^2 - m + 1.$$

Получаем

$$\lim_{m\to\infty}\frac{a_{2m}}{(2m)^2} = \lim_{m\to\infty}\frac{a_{2m+1}}{(2m+1)^2} = \frac{1}{4}$$

Задача 3. *Можно ли найти такое натуральное* n, *что* $2013^n = \dots\underbrace{0\dots 0}_{2013}1$ *?*

Решение. $2013^4 = \dots 1 = 1 + 10a$, $a \in \mathbb{N}$.

$$(1+10a)^{10} = 1 + 10\cdot 10a + \sum_{k=2}^{10} C_{10}^k (10a)^k = 1 + 100b, \qquad b\in\mathbb{N}$$

$$(1+100b)^{10} = 1 + 10\cdot 100b + \sum_{k=2}^{10} C_{10}^k (100b)^k = 1 + 1000c, \qquad c\in\mathbb{N}$$

и т.д. Получаем, что $2013^{4\cdot 10^{2013}}$ делится на 10^{2014} с остатком 1, что и требовалось.

Задача 4. *Доказать, что для любой функции $f(x)$, непрерывной на промежутке $[0;+\infty)$, уравнение $f(x^2)+2x=f(x)+1$ имеет решение.*

Решение. Функция $g(x)=f(x^2)+2x-f(x)-1$ непрерывна на промежутке $[0;+\infty)$, при этом $g(0)=-1$, $g(1)=1$. Следовательно, $\exists x_o \in (0;1)$: $g(x_o)=0$, т.е. x_o – решение данного уравнения.

Задача 5. *Доказать, что если для некоторых матриц A и B имеет место равенство $AB-BA=A$, то матрица A вырождена.*

Решение. Перепишем равенство в виде $AB=(B+I)A$. Если A не вырождена, то получим $ABA^{-1}=B+I$. Матрицы ABA^{-1} и B имеют одинаковый характеристический многочлен

$$\chi(\lambda)=\det(B-\lambda I)=\det\big(A(B-\lambda I)A^{-1}\big)=\det(ABA^{-1}-\lambda I).$$

Однако, характеристический многочлен матрицы $B+I$ равен $\chi_1(\lambda)=\chi(\lambda-1)$. Не существует многочлен χ ненулевй степени, для которого $\chi(\lambda-1)=\chi(\lambda)\ \forall\ \lambda$. Противоречие.

Задача 6. *Существует ли многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющий условиям $f(4)=1$, $f(9)=11$, $f'(4)=0$?*

Решение. Предположим, что такой многочлен существует. Рассмотрим многочлен $P(t)=f(4+t)$, его коэффициенты также целые. Для него имеем $P(0)=1$, $P'(0)=0$, $P(5)=11$, следовательно,

$$P(t)=1+c_2t^2+c_3t^3+\ldots+c_nt^n; \qquad P(5)=1+25(c_2+5c_3+\ldots+5^{n-2}c_n)=11.$$

Такого не может быть, так как $11-1$ не делится на 25.

Задача 7. *Вычислить* $\lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{1^{p+1}+2^{p+1}+\ldots+n^{p+1}} \qquad (p>0).$

Решение. Оценим сумму через интеграл. $\displaystyle\int_{k-1}^{k} x^p dx < k^p < \int_{k}^{k+1} x^p dx;$

$$\frac{n^{p+1}}{p+1}=\int_0^n x^p dx < 1^p+\ldots+n^p < \int_1^{n+1} x^p dx = \frac{(n+1)^{p+1}-1}{p+1}$$

При $n\to\infty$ имеем эквивалентность $((n+1)^{p+1}-1)\sim n^{p+1}$, поэтому получаем

$$1^p+\ldots+n^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Заменив в нашей дроби числитель и знаменатель на эквивалентные, получаем при $n\to\infty$

$$n\frac{1^p+\ldots+n^p}{1^{p+1}+\ldots+n^{p+1}} \sim n\frac{n^{p+1}/(p+1)}{n^{p+2}/(p+2)} \longrightarrow \frac{p+2}{p+1}$$

Задача 8. *Решить дифференциальное уравнение $x(x+y)y'=x+xy+y^2$.*

Решение. Рассмотрим функцию $z(x) = x + y$. Уравнение перепишется в виде $xz(z' - 1) = x + z(z - x)$, т.е. $xzz' = x + z^2$, т.е. ($z = 0$ не решение)

$$z' = \frac{z}{x} + \frac{1}{z}.$$

Это уравнение Бернулли. Однородное линейное уравнение $u' = u/x$ даст $u = x$, так что будем искать z в виде $z = xv$.

$$v + xv' = v + \frac{1}{xv}; \qquad vdv = \frac{dx}{x^2}; \qquad v^2 = C - \frac{2}{x}$$

$$v = \pm\sqrt{C - 2/x} \qquad z = \pm\sqrt{Cx^2 - 2x}$$

Ответ: $y = \pm\sqrt{Cx^2 - 2x} - x$.

Апрель 2012

Задача 1. *Доказать, что если для некоторой матрицы A выполняется $A^3 = 2E$, то матрица $A - E$ невырождена.*

Решение. Если $A-E$ вырождена, то вырождена и матрица $(A-E)(A^2+A+E) = A^3-E = E$. Противоречие.

Задача 2. *Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $x_1 = a$, $x_{n+1} = \sqrt{1 - x_n^2}$. При каких a существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$?*

Решение. Для всякого $n \geq 1$ имеем $x_{n+2} = \sqrt{1-(1-x_n^2)} = |x_n|$. Поэтому существуют пределы $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = |a|$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = \sqrt{1-a^2}$. Они совпадут при $a = \pm 1/\sqrt{2}$.

Ответ: $a = \pm 1/\sqrt{2}$.

Задача 3. *Найти остаток от деления числа $\left(3+\sqrt{17}\right)^{2012} + \left(3-\sqrt{17}\right)^{2012}$ на 5.*

Решение. Из формулы бинома Ньютона легко видеть, что $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$ число $b_n = \left(3+\sqrt{17}\right)^n + \left(3-\sqrt{17}\right)^n$ целое. Выведем рекуррентное соотношение типа Фибоначчи, справедливое для нашей последовательности. Числа $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{17}$ являются корнями уравнения $\lambda^2 - 6\lambda - 8$. Следовательно, геометрические прогрессии со знаменателями $\lambda_{1,2}$ и их линейные комбинации удовлетворяют соотношению $b_{n+2} - 6b_{n+1} - 8b_n = 0$. Итак,

$$b_{n+2} = 6b_{n+1} + 8b_n \equiv b_{n+1} + 3b_n (\mathrm{mod} 5).$$

Зная $b_0 = 2$, $b_1 = 6 \equiv 1 (\mathrm{mod} 5)$, будем рекуррентно вычислять остатки от деления b_n на 5. Пары соседних остатков будут периодически повторяться! Составляем таблицу:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$b_n(\mathrm{mod} 5)$	2	1	2	0	1	1	4	2	4	0	2	2	3	4

Поскольку $3 \equiv -2$ и $4 \equiv -1 (\mathrm{mod} 5)$, мы видим, что $b_{12} \equiv -b_0$ и $b_{13} \equiv -b_1 (\mathrm{mod} 5)$, откуда в силу рекурсии следует $b_{n+12} \equiv -b_n (\mathrm{mod} 5)$ $\forall n = 0, 1, 2, \ldots$, и остатки от деления b_n на 5 повторяются с периодом 24. Получаем

$$b_{2012} = b_{83\cdot 24+20} \equiv b_{20} \equiv -b_8 \equiv -4 \equiv 1 (\mathrm{mod} 5).$$

Ответ: 1.

Задача 4. *Действительная функция $f(x)$ такова, что при всех $x \geq 1$ выполняется $0 < f(x) \leq \dfrac{1}{\sqrt{f^2(x) - x^2}}$. Доказать, что $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, и вычислить его.*

Решение.

$$0 < f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{f^2(x) - x^2}} \Longrightarrow 0 < f(x)\sqrt{f^2(x) - x^2} \leq 1 \Longrightarrow \begin{cases} 0 < f^2(x) - x^2 \leq f^{-2}(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Получаем оценку $x < f(x) \leq \sqrt{x^2 + f^{-2}(x)} < \sqrt{x^2 + x^{-2}} = x(1 + o(1))$ при $x \to +\infty$.

Ответ: $\lim = 1$.

Задача 5. *Верно ли, что любую квадратную матрицу размера $n \geq 2$ можно представить в виде $A = B + C$, где $B^2 = B$, $C^3 = 0$?*

Решение. В качестве контрпримера возьмём $A = 2E$. Пусть $2E = B + C$. Тогда

$$0 = C^3 = (2E - B)^3 = 8E - 12B + 6B^2 - B^3 = 8E - 7B \Longrightarrow B = \frac{8}{7}E \Longrightarrow B^2 \neq B.$$

Ответ: неверно.

Задача 6. *Доказать, что $x^3 + y^3 + xy \leq 1/27$ при $x, y \in [-2; 0]$.*

Решение. На компакте $[-2; 0] \times [-2; 0]$ функция $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy$ достигает максимум либо во внутренней, либо в граничной точке. Если максимум во внутренней точке, то в ней должны выполняться необходимые условия экстремума

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial f/\partial y = 3x^2 + y = 0 \\ \partial f/\partial x = 3y^2 + x = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = -3x^2 \\ 27x^4 + x = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = -1/3 \\ x = y = 0 \text{ (не внутренняя)} \end{array} \right.$$

В найденной точке имеем $f(-1/3, -1/3) = 1/27$.

Теперь смотрим на границе. При $x = 0$ или $y = 0$ имеем $f = 0$; при $x = -2$ будет $f(2, y) = y^3 - 2y - 8 \leq -2y - 8 < 0$, аналогично при $y = -2$.

Задача 7. *Найти сумму ряда* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3 - n}$.

Решение. Разложим правильную дробь в сумму простейших дробей (см. www.BauMO.narod.ru/MA2.pdf, лекция 2):

$$\frac{2n-1}{n^3-n} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1}\Big).$$

Тогда мы сможем вычислить сумму таким путём:

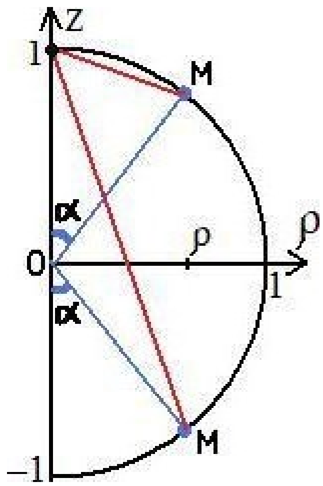
$$\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{n-1} + \frac{2}{n} - \frac{3}{n+1}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\Big) + 3\sum_{n=2}^{\infty}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)\Big) =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\Big) + \frac{3}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \ldots\Big) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

Ответ: 5/4.

Задача 8. *Вычислить* $\iint\limits_{\Sigma} f(M)dS$, *где Σ – сфера радиуса R, а $f(M)$ – расстояние от точки M до фиксированной точки сферы.*

Решение. Пусть $R = 1$. Возьмём сферу $\Sigma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ с фиксированной точкой $(0; 0; 1)$. Для вычисления поверхностного интеграла спроецируем обе полусферы Σ на плоскость Oxy, при этом секанс угла наклона $\sqrt{1 + |\nabla z|^2} = 1/\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Введём на плоскости Oxy полярные координаты ρ, φ. Далее введём новую переменную $\alpha = \arcsin\rho$. Тогда

$$f(M) = \left\{ \begin{array}{ll} 2\sin(\alpha/2), & z > 0 \\ 2\sin((\pi - \alpha)/2), & z < 0 \end{array} \right.$$



$$\iint\limits_{\Sigma} f(M)dS = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{2\sin(\alpha/2)}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{2\sin((\pi-\alpha)/2)}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^1 \frac{\sin(\alpha/2)+\sin((\pi-\alpha)/2)}{\sqrt{1-\rho^2}}\rho d\rho = 4\pi \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin(\alpha/2)+\sin((\pi-\alpha)/2)}{\cos\alpha}\sin\alpha\ d\sin\alpha =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^{\pi/2} \Big(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\pi-\alpha}{2}\Big)\sin\alpha d\alpha = 4\pi \int\limits_0^{\pi} \sin\frac{\alpha}{2}\sin\alpha d\alpha =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\alpha}{2} - \cos\frac{3\alpha}{2} d\alpha = 2\pi\Big(2\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{2}{3}\sin\frac{3\alpha}{2}\Big)\Big|_0^{\pi} = 2\pi\Big(2\cdot 1 - \frac{2}{3}\cdot(-1)\Big) = \frac{16\pi}{3}.$$

Ответ: $16\pi R^3/3$.

Апрель 2011

Задача 1. *Найти площадь квадрата $ABCD$, вершины которого лежат на кривой* $y = x - \dfrac{1}{x}$.

Решение. Квадрат должен иметь тот же центр симметрии, что и гипербола, т.е. O. Тогда вершины квадрата имеют координаты $(a;b)$, $(b;-a)$, $(-a;-b)$, $(-b;a)$. Достаточно подставить в уравнение гиперболы первые две вершины:

$$\begin{cases} a - 1/a = b \\ b - 1/b = -a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 - 1 = ab \\ b^2 - 1 = -ab \end{cases} \Longrightarrow a^2 + b^2 - 2 = 0.$$

Длина диагонали квадрата $d = 2\sqrt{a^2+b^2}$. Даже не вычисляя a и b, получаем $S = d^2/2 = 2(a^2+b^2) = 4$.

Задача 2. *Решить неравенство* $[2x+1] \le 7x+3$ *(здесь* $[a]$ *обозначает целую часть числа* a*).*

Решение. Пусть $S = \{[2x+1] \le 7x+3\}$. В силу неравенств $2x < [2x+1] \le 2x+1$ получаем вложения множеств

$$\{2x+1 \le 7x+3\} \subset S \subset \{2x \le 7x+3\}, \quad \text{т.е.} \quad [-0{,}4;+\infty) \subset S \subset [-0{,}6;+\infty).$$

Осталось рассмотреть отрезок $[-0{,}6;-0{,}4]$. На нём $[2x+1]$ имеет разрыв:

на $[-0{,}6;-0{,}5)$ будет $[2x+1] = -1 \le 7x+3 \Longleftrightarrow x \ge -\dfrac{4}{7}$;

на $[-0{,}5;-0{,}4]$ будет $[2x+1] = 0 \le 7x+3 \Longleftrightarrow x \ge -\dfrac{3}{7}$.

Таким образом, $S \cap [-0{,}6;-0{,}4] = [-\frac{4}{7};-0{,}5) \cup [-\frac{3}{7};-0{,}4]$.

Ответ: $S = [-\frac{4}{7};-0{,}5) \cup [-\frac{3}{7};+\infty)$.

Задача 3. *Образуют ли многочлены* $f_k(x) = (x-k)(x-k-1)\dots(x-k-n+1)$ *линейно независимую систему ?*

Решение. Рассмотрим матрицу из значений многочленов в выбранных точках:

$$\begin{bmatrix} f_1(0) & f_1(1) & \dots & f_1(n-1) \\ f_2(0) & f_2(1) & \dots & f_2(n-1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_n(0) & f_n(1) & \dots & f_n(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ * & * & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

(здесь $*$ обозначает любое число $\ne 0$). Верхнетреугольная матрица невырождена, т.е. её строки линейно независимы. Из этого следует линейная независимость многочленов.

Задача 4. *Существует ли непрерывная функция* $f(x)$ *такая, что* $\forall x \ \ f(f(x)) = |x| - 2x$ *?*

Решение. Функция f должна быть инъективной, поскольку $f \circ f$ инъективна. Непрерывная функция, определённая на всей $\mathbb{R}$, является инъективной $\Longleftrightarrow$ строго монотонна. Если f возрастает, то $f \circ f$ возрастает. Если f убывает, то $f \circ f$ опять же возрастает. Но функция $|x| - 2x$ убывает!

Ответ: не существует.

Задача 5. *На полке стоят 25 томов. Разрешается брать любые 4 книги (не обязательно стоящие рядом) и переставлять их циклически. Можно ли после нескольких таких перестановок получить обратное расположение книг ?*

Решение. Обозначим через $(a \to b \to c \to d \to)$ циклическую перестановку книг a, b, c, d. Если такую перестановку сделать дважды, получатся 2 попарные перестановки: $a \leftrightarrow c$, $b \leftrightarrow d$. Нужная нам перестановка может быть получена за 12 шагов:
$(1 \to 2 \to 25 \to 24 \to)^2 (3 \to 4 \to 23 \to 22 \to)^2 \ldots (11 \to 12 \to 15 \to 14 \to)^2$.

Ответ: можно.

Задача 6. *Существует ли матрица A размера $n \times n$, удовлетворяющая условию $A = A^T + A^{-1}$?*

Решение. $A^{-1} = A - A^T$ – кососимметричная матрица. При нечётном n она вырождена, т.к. при умножении всех строк на -1 определитель умножается на $(-1)^n$. При чётном n существует искомая матрица A с комплексными числами: пусть она состоит из стоящих на диагонали блоков

$$\begin{bmatrix} 0 & i/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица с действительными числами не существует. Домножим уравнение на A справа: $A^2 = A^T A + E$. Матрица $A^T A$ симметрична, её собственные значения $\lambda_n \geq \ldots \geq \lambda_2 \geq \lambda_1 \geq 0$. Её определитель равен

$$|A^T A| = |A|^2 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n.$$

Для матрицы $A^2 = A^T A + E$ получаем

$$|A^2| = |A|^2 = (\lambda_1 + 1)(\lambda_2 + 1) \ldots (\lambda_n + 1).$$

Противоречие.

Задача 7. *Для функции* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{1 - x^n}$ *вычислить* $f^{(10)}(0)$.

Решение. По признаку Даламбера ряд сходится при $|x| < 1$, т.к. при $n \to \infty$ $\dfrac{x^n}{1-x^n} \sim x^n$. Разложим каждое слагаемое в степенной ряд:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (x^n)^k = (x + x^2 + x^3 + \ldots) + (x^2 + x^4 + x^6 + \ldots) + (x^3 + x^6 + x^9 + \ldots) + \ldots$$

Четыре раза встретится слагаемое $x^{10} = (x^2)^5 = (x^5)^2 = (x^{10})^1$. Ненулевую 10-ю производную в нуле имеет только оно.

Ответ: $4 \cdot 10!$

Задача 8. *Может ли уравнение $z^2 + a|z| + b = 0$ $(a, b \in \mathbb{C})$ иметь 20 различных комплексных корней ?*

Решение. Пусть $\rho = |z|$, $a = A + i\alpha$, $b = B + i\beta$. Перепишем уравнение как $z^2 = -a|z| - b$ и возьмём квадраты модулей: $\rho^4 = (A\rho + B)^2 + (\alpha\rho + \beta)^2$.

Это уравнение 4-й степени имеет не более 4 неотрицательных корней ρ. При каждом таком ρ находим $z = \pm\sqrt{-a\rho - b}$. Таким образом, корней z может быть не больше восьми.

Ответ: не может.

Апрель 2010

Задача 1. *Верно ли, что любую матрицу размера* 4×4 *можно представить в виде суммы невырожденной матрицы и матрицы ранга 1 ?*

Решение. Если матрица ранга 2, то, вычтя из неё матрицу ранга 1, получим матрицу ранга не выше 3, т.е. вырожденую.

Ответ: неверно.

Задача 2. *Через точки A, B параболы проведены две касательные к ней. Они оказались перпендикулярными. Доказать, что отрезок AB содержит фокус параболы.*

Решение. Выберем декартову систему координат и такой масштаб, чтобы парабола задавалась уравнением $y = x^2/2$, тогда фокус $F(0;1/2)$. Пусть $A(a;a^2/2)$, $B(b;b^2/2)$. Тангенсы углов наклона касательных: $\operatorname{tg}\alpha = a$, $\operatorname{tg}\beta = b$; $\alpha - \beta = \pi/2 \Longrightarrow b = -1/a$. Итак, $B(-1/a;1/2a^2)$. Проверим коллинеарность векторов $\vec{FA}$ и $\vec{FB}$:

$$\vec{FA} = \begin{pmatrix} a \\ \frac{a^2-1}{2} \end{pmatrix}; \quad \vec{FB} = \begin{pmatrix} -1/a \\ \frac{1-a^2}{2a^2} \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} a & -1/a \\ \frac{a^2-1}{2} & \frac{1-a^2}{2a^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, $F \in AB$.

Задача 3. *При каких a последовательность, заданная правилом* $x_1 = a$, $x_{n+1} = 4\sqrt{x_n - 3} - x_n + 6$, *определена при всех* $n \in \mathbb{N}$ *?*

Решение. Для $\exists x_2$ необходимо условие $a \geq 3$. Для $\exists x_3$ необходимо $x_2 \geq 3$, т.е.

$$4\sqrt{a-3} - a + 3 \geq 0 \Longrightarrow a \leq 19.$$

Покажем, что эти два условия достаточны (по принципу матем. индукции это будет вытекать из утверждения: $3 \leq x_n \leq 19 \Longrightarrow 3 \leq x_{n+1} \leq 19$). Действительно, для функции $f(x) = 4\sqrt{x-3} - x + 6$ имеем $f(3) = 3$, $f(19) = 3$;

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x-3}} - 1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 7, \qquad f(7) = 7,$$

на $[3;7]$ $f \nearrow$, на $[7;19]$ $f \searrow$, так что в точке 7 максимум, и $3 \leq x \leq 19 \Longrightarrow 3 \leq f(x) \leq 7$.

Задача 4. *Можно ли множество натуральных чисел разбить на 2 непустых подмножества* S_1, S_2 *так, чтобы* $\forall x \in S_1$, $y \in S_2$ *число* $x + y$ *было простым ?*

Решение. Предположим, что такое разбиение возможно. Сумма любых двух чётных чисел – составное число, и сумма любых двух нечётных чисел – составное число, следовательно, все чётные в S_1, а все нечётные в S_2. Но $4 + 5 = 9$ составное – противоречие.

Ответ: нельзя.

Задача 5. *Верно ли, что любую квадратную матрицу A можно представить в виде произведения симметрической и невырожденной матриц ?*

Решение. Элементарные преобразования над строками матрицы A равносильны умножению A слева на невырожденую матрицу B. По алгоритму Гаусса элементарными преобразованиями строк можно получить диагональную матрицу D. Таким образом, $A = B^{-1} \cdot D$.

Ответ: верно.

Задача 6. *Придумать дифференциальное уравнение, у которого общее решение имет вид* $y = C_1 + C_2x^2$.

Решение. Уравнение должно быть однородным линейным второго порядка: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Подставим нужные фундаментальные решения $y_1 = 1$, $y_2 = x^2$:

$$2 + 2xp(x) + x^2q(x) = 0; \quad q(x) = 0 \Longrightarrow p(x) = -1/x.$$

Ответ: $y'' - y'/x = 0$, а ещё лучше: $xy'' - y' = 0$.

Задача 7. *Определить, сходится ли ряд*

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots \tag{1}$$

Решение. Докажем, что ряд сходится, оценив знаменатели снизу.

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} > \int_0^n \sqrt{t}\ dt = \frac{2}{3}n^{3/2}.$$

и тогда ряд (1) оценивается сверху сходящимся рядом $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2n^{3/2}}$.

Ответ: сходится.

Задача 8. *Для функции* $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^x)}$ *вычислить* $\varphi'(2010)$.

Решение. Сделаем замену $u = \operatorname{arctg} t$.

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{1+\operatorname{tg}^x u} = \int_0^{\pi/4} \frac{du}{1+\operatorname{tg}^x u} + \int_0^{\pi/4} \frac{du}{1+\operatorname{ctg}^x u} \equiv \frac{\pi}{4},$$

поскольку, обозначив $T = \operatorname{tg}^x u$, имеем $\dfrac{1}{1+T} + \dfrac{1}{1+T^{-1}} = \dfrac{1}{1+T} + \dfrac{T}{1+T} = 1$.

Ответ: 0.